Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1972

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

О СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА, ПРИНЦИПЕ НЕГОЛОНОМНОСТИ И ПРОБЛЕМЕ «ПТОЛЕМЕЙ—КОПЕРНИК»

Предлагается решение проблемы «Птолемей—Коперник» с помощью понятия и уравнения канонической системы отсчета. Даны определения системы отсчета и относящихся к ней понятий времени и пространства, класса, неголономности времени, тензора внешнего кручения и внешней кривизны, скобок Пуассона. Высказываются соображения о типах расщепления пространства—времени, системах координат и системах тетрад, о принципе неголономности и аристотелевой концепции пространства.

1. Понятие системы отчета связывает четырехмерное и трехмерное описания гравитационного поля. Благодаря этому четырехметричный геометрический подход Минковского может быть сопоставлен с принципом эквивалентности Эйнштейна, сформулированным им на трехмерном физическом языке систем отсчета. Привлекая понятие неголономного многообразия, можно дать простые геометрические определения времени и пространства системы отсчета (СО), построить классификацию СО. Последовательно различая понятия систем тетрад и систем отсчета с одной стороны, и понятие системы координат с другой и привлекая понятие канонической СО [1, 2], можно предложить решение проблемы «Птолемей—Коперник». Решение это сводится к существованию инвариантного критерия различия гелиоцентрической системы мира Коперника и геоцентрической системы Птолемея в рамках общековариантной общей теории относительности (ОТО). Этим вопросам и посвящена настоящая работа. При этом будут использованы понятия системы отсчета и неголономности. Системой отсчета мы называем [2] ориентированную конгруэнцию Γ времениподобных кривых γ в многообразии событий V_4 с лоренцевой сигнатурой. Неголономностью, следуя Э. Картану, будем называть внешнюю и внутреннюю кривизну и кручение многообразий. Например, кривая линия есть неголономная прямая (имеется в виду только внешняя кривизна различных порядков), поверхность—неголономная плоскость. Неголономность означает своего рода неоднородность, распадение целого на отдельные элементы, и связана, очевидно, в установившейся в настоящее время в физике концепций близкодействия.

2. Система отсчета определяется гладким полем единичного вектора $u^\alpha = dx^\alpha/ds\,(\alpha = 0, \ldots, 3)$ и является геометрическим образом идеализованного непрерывного единого деформирующегося тела отсчета со

стандартными часами, заполняющего своим протяжением и своей историей рассматриваемую область V_4. Множество событий в малой окрестности данной точки с временным направлением u^α наблюдателя γ, одновременных с точки зрения этого наблюдателя, образует (при линейном продолжении) его мгновенное локальное пространство $R_3(x)$, ортогональное мировой линии наблюдателя.

Определения. Время данной системы отсчета есть ее касательное многообразие $\overline{\Theta}=T(\Gamma)$. Пространство системы отсчета есть двойственное времени неголономное многообразие $\Sigma=\overline{\Theta}$.

Неголономное многообразие V_4^m представляет собой поле площадок $\{E_m\}\subset T(V_4)$. Многообразие нормального оснащения образует двойственное многообразие $V_4^{4-m}=\overline{V}_4^m$. Очевидно,

$$\overline{\Theta}=V_4^1,\ \ \Sigma=\overline{V}_4^1=V_4^3,\ \ V_4^1+V_4^3=V_4^4\equiv T(V_4).$$

Понятия пространства и времени не имеют смысла по отдельности и приобретают его только в применении к понятию системы отсчета. Поэтому, например, понятие вращения по отношению к пространству как таковому некорректно. Понятие многообразия событий в рамках общей теории относительности первично, его расщепление — вторично и может быть различным. Создающее кривизну вещество расщепляет многообразие событий на многообразия пространственное V_4^3 и временное V_4^1. В релятивистски вырожденных пространствах типа N, III, по Петрову, соответствующих поперечной локально-плоской гравитационной волне кривизны (N), и продольно-поперечной закрученной волне (III) [1, 2], вместо расщепления вида $4=3+1$ пространства V_4 реальностью, по-видимому, являются расщепления вида $4=2+2$, $4=1+(1_1+1_2+1_3)=1+3$. В этих релятивистски вырожденных пространствах нет вещества (скаляры кривизны равны нулю) и есть только гравитационные волны. Для пространства типа III, по-видимому, заполнены все степени свободы колебания в волне, тогда как в волне типа II (тип N с веществом) в симметрично искривленном V_4 интерференция погашает продольный компонент. Неоднородная кривизна пространств типа I погашает все компоненты волны, но создает выделенное временное направление — первый главный вектор Римана [3], определяющий каноническую систему отсчета [1, 2].

3. Свойства пространства и времени СО описываются разложением ковариантной производной ее касательного вектора

$$\nabla_\mu u_\nu=\underset{1}{\varkappa u_\mu u_\nu}+d_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu},\ \ \underset{1}{\varkappa u_\nu}=f_\nu=u^\rho\nabla_\rho u_\nu,$$

$$u_\mu u^\mu=-\underset{1\ 1}{u_\mu u^\mu}=1,\ \ d_{[\mu\nu]}=\omega_{(\mu\nu)}=0,$$

$$d_{\mu\nu}=\sigma_{\mu\nu}+\frac{1}{3}\theta\,(g_{\mu\nu}-u_\mu u_\nu),\ \ \sigma^\mu_\mu=0,\ \ [\ \ ]=alt,\ \ (\ \ )=sym.$$

Построим классификацию СО. Будем считать классом k СО класс пфаффовой формы $\omega=u_\alpha dx^\alpha$. Имеем четыре случая:

$$k=1\quad u_\lambda=\partial_\lambda\varphi\equiv\partial\varphi/\partial x^\lambda,\ \ f_\lambda=0,\ \ \omega_{\mu\nu}=0,$$

$$k=2\quad u_\lambda=\sigma\partial_{\tilde\lambda}\varphi,\ \ f_\lambda=-\partial'_\lambda\ln\sigma\neq0,\ \ \omega_{\mu\nu}=0,$$

$$k=3\quad u_\lambda=\sigma\partial_\lambda\varphi+\partial_\lambda\psi,\ \ f_\lambda=0,\ \ f_\lambda\neq0,\ \ \omega_{\mu\nu}\neq0,$$

$$k=4\quad u_\lambda=\sigma\partial_\lambda\varphi+\tau\partial_\lambda\psi,\ \ f_\lambda\neq0,\ \ \omega_{\mu\nu}\neq0.$$

$$\partial'_\lambda=(g^\mu_\lambda-u_\lambda u^\mu)\partial_\mu.$$

Вектор f_λ является первым вектором кривизны $\gamma \in \Gamma$, тензор $\omega_{\mu\nu}$ описывает неголономность Σ, а $d_{\mu\nu}$ образует второй фундаментальный тензор Σ. В рамках хронометрически-инвариантного формализма Зельманова [4] эти величины интерпретируются как вектор гравитационно-инерциальной силы, тензор угловой скорости вращения и тензор скорости деформации системы отсчета Г. Они описывают ускорение (свободного падения), вращение и деформацию СО Г относительно локально галилеевой мгновенно сопутствующей СО Γ_0 (касание первого порядка γ и γ_0 в данной точке), относящейся к первому классу и своей для каждой мировой точки. Поскольку при обходе по контуру в Σ мы получаем зазор по времени, означающий невозможность синхронизации часов при наличии вращения, мы назовем определяющий этот зазор тензор $M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \omega_{\mu\nu}u^\lambda$) тензором внешнего кручения СО. Тензор $N_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = d_{\mu\nu}u^\lambda$ назовем тензором внешней кривизны, а $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = N_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ — тензором полной внешней неголономности пространства Σ данной СО.

Величины f и ω появляются при коммутировании хронометрических производных Зельманова [4]. Возьмем произвольное поле тетрады $(\underset{0}{e}^\alpha, \underset{i}{e}^\alpha)$ $(\underset{0}{e}^\alpha \underset{0}{e}_\alpha > 0,\ i = 1, 2, 3)$. Проекция триады $\underset{i}{e}^\alpha$ по вектору $u^\alpha \equiv \overset{0}{\underset{0}{u}}{}^\alpha$ и проекция $\underset{0}{e}^\alpha$ на θ [4] равна

$$\pi : \underset{i}{e}^\alpha \to \underset{i}{e}^\alpha (g_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta) \equiv \underset{i}{u}^\beta \in \Sigma,\ \ \underset{0}{e}^\alpha u_\alpha u^\beta \in \Theta.$$

Хронометрические производные Зельманова представляют собой линейные операторы X_0, X_i, соответствующие тетраде $(\underset{0}{u}^\alpha, \underset{i}{u}^\alpha)$, и в системе координат с линиями времени γ имеют вид [4]

$$X_0^* = \partial_0 = \underset{0}{u}^\alpha \partial_\alpha = g_{00}^{-1/2}\partial_0,\ \ X_i = {}^*\partial_i = \underset{i}{u}^\alpha \partial_\alpha = \partial_i - g_{0i}g_{00}^{-1}\partial_0,$$

$$[X_0, X_i] = -f_i X_0,$$

$$[X_i X_k] = 2\omega_{ik}X_0,\ \ {}^*\partial_0\omega_{ik} + {}^*\partial_{[i}f_{k]} = 0,$$

$${}^*\partial_{[i}\omega_{jk]} + f_{[i}\omega_{jk]} = 0,\ \ [ijk] = zykl\,(i, j, k).$$

Последние равенства представляют собой тождества Якоби и сами связаны одним тождеством того же типа. В случае постоянства структурного тензора $C_{ab}^c\,(C_{0i}^0 = f_i,\ C_{ik}^0 = 2\omega_{ik},\ C_{ab}^i = 0)$ $a, b, c = 0, 1, 2, 3$ система отсчета определяет пространство группы Ли. Для систем отсчета первого класса (полугеодезических, синхронных) группа абелева. Отметим также равенства [4]:

$$2d_{ik} = {}^*\partial_0 h_{ik},\ \ 2d^{ik} = -{}^*\partial_0 h^{ik},\ \ \theta = d_i^i = \ln\sqrt{h},$$

$$h_{ik} = -g_{ik} + g_{0i}g_{0k}g_{00}^{-1},\ \ h = \mathrm{Det}\,[h_{ik}].$$

4. Открытая А. Л. Зельмановым неголономность трехмерного физического пространства СО представляет собой внешнее кручение пространства тела отсчета Σ и эквивалентна вращению СО. Деформация тела отсчета эквивалентна внешней кривизне. Будем говорить, что собственное время элемента тела (частицы, наблюдателя) неголономно, если его мировая линия отлична от геодезической. Неголономность времени тела отсчета означает наличие в нем негравитационных взаимодействий. Трехмерный тензор внутренней кривизны Σ [4] тоже отличен от нуля, даже если V_4 плоско (но справедливо утверждение: внутреннее кручение Σ равно нулю, поскольку оно отсутствует у V_4).

Таким образом, все характеристики системы отсчета и самого гравитационного поля — это те или иные виды неголономности. Будем говорить, что Σ голономно, если $\omega_{\mu\nu}=0$, и Σ вполне голономно, если также $d_{\mu\nu}=0$. Пространство и время голономны только у СО первого класса (геодезическая и нормальная конгруэнция).

При $k=2$ есть одновременность, или единопространственность, но нет единовременности: мгновенные пространства (нормальные Г гиперповерхности) высекают из Г отрезки времени различной длины, синхронизированные стандартные часы рассогласовываются. При $k=3, 4$ локальные времена и пространства сложно самовоздействующего тела отсчета остаются разрозненными.

Пространство и время системы отсчета в плоском V_4 неголономны, вообще говоря, что означает в переводе с геометрического языка на физический наличие поля инерциальных сил, в том числе кориолисовых и деформационных [4]. При этом внутренняя трехмерная кривизна уравновешивается внешними кривизной и кручением Σ и кривизной Ξ, короче — уравновешиваются внутренняя и внешняя неголономности СО. Гравитационное поле тождественно четырехмерной внутренней кривизне V_4. Оно порождает вынужденную внешнюю и внутреннюю кривизну пространства СО и нарушает упомянутое равновесие. Реальность гравитационного поля в СО класса I проявляется в наличии деформации и трехмерной внутренней кривизны, а в вакууме можно ограничиться только деформацией (кривизна получается из тождества, связывающего кривизну и деформацию), что соответствует геодезическому отклонению (вещественная часть стационарных кривизн V_4) и геодезическим сдвигам (мнимая часть стационарных кривизн) мировых линий СО [1, 2].

Учитывая фундаментальный характер понятия неголономности в ОТО, можно при желании сформулировать принцип 4-неголономности, имеющей скорее терминологический интерес.

Принцип 4-неголономности: гравитационное поле есть проявление неголономности (внутренней кривизны) многообразия событий.

При переходе от четырехмерного рассмотрения к трехмерному, из принципа 4-неголономности получается принцип (3+1)-неголономности, приближающийся к принципу эквивалентности. Выбор СО расщепляет четырехмерную неголономность (кривизну) в серию трехмерных и одномерной неголономностей. Это расщепление зависит от выбора СО в широких, но конечных пределах. В малом, где можно пренебречь влиянием 4-кривизны (например, на сумму углов в треугольнике), выбор СО уже полностью определяет все виды ее неголономности. По существу в утверждении, что и гравитационное и инерциальное поля могут быть описаны неголономностью СО, и заключается геометрически изложенный смысл физического принципа эквивалентности. Этой качественной эквивалентности достаточно, чтобы учесть одинаковое действие гравитационного и инерциального полей на массы различной природы, что и составляет сущность принципа эквивалентности. Если же мы настаиваем на истинной физической эквивалентности этих полей, то вынуждены придать принципу эквивалентности локальный характер, чтобы получить приблизительно однородное гравитационное поле. Но там, где гравитационное поле однородно, оно согласно ОТО отсутствует. Это вызвано тем, что кривизна (вторые производные от метрики), относимая в пределе к каждой точке, характеризует не просто сам по себе бесконечно малый элемент V_4, а прежде всего его связь с другими элементами. Говоря физически, важны не ускорения, а относительные ускорения пробных частиц. Эта черта учитывается принципом 4-неголономности, но не учитывается принципом эквивалентности.

Таким образом, на уровне четырехмерной кривизны (вторые производные от метрики) нет эквивалентности гравитационного и инерциального полей. При расщеплении неголономности на (3+1)-неголономность (здесь существенны уже и первые и вторые производные от метрики) мы получаем следующий принцип (3+1)-неголономности, или принцип качественной (грубой, не полной, относительной) эквивалентности.

Принцип качественной эквивалентности: и гравитационное, и инерциальное поля (вместе или по отдельности) обнаруживаются в конечной области наблюдателем как характеристики неголономности пространства и времени его системы отсчета.

Для электромагнитного и инерциального полей мы указанной близости, например, уже не имеем.

4. В неоднородно искривленном V_4 типа I, по Петрову, существует однозначно определяемая каноническая СО [1, 2]. Мы определяем ее как ориентированную конгруэнцию кривых, огибающих поле временноподобного вектора канонического ортрепера тензора конформной кривизны. Упомянутый канонический вектор определяется одномерным направлением пересечения двумерных площадок стационарного значения конформной кривизны. В этом смысле каноническая СО определяется кривизной пространства — времени. Любая система наблюдателей может построить первую однозначно. Эта СО определяется однородным алгебраическим уравнением четвертого порядка для искомого вектора u^α с коэффициентами, определяемыми через тензор Вейля и дуальный тензор [1, 2]:

$$C^{\rho}_{\cdot\alpha\beta[\mu}{}^{*}C_{\nu]\,\gamma\delta\rho}u^{\alpha}u^{\beta}u^{\gamma}u^{\delta}=0. \qquad (1)$$

Из четырех решений, определяющих каноническую систему тетрад, используем только временноподобный нормированный вектор.

Внутренняя кривизна трехмерного пространства канонической СО индивидуализирует его места различием именно метрических свойств. Это позволяет говорить о возрождении в ОТО на новом уровне аристотелевой концепции пространства. Действительно, индивидуализация мест пространства негравитационными полями наблюдается и в специальной теории относительности (СТО), углубляющей галилееву концепцию пространства. Трехмерная кривизна индивидуализирует точки пространства уже его собственными свойствами, но СО и его пространство можно выбирать и в СТО, и в ОТО. Только выделение преимущественной СО по кривизне самого V_4 позволяет говорить об абсолютном покое, абсолютном движении и различии свойств различных мест трехмерного пространства абсолютной (канонической) СО. Перемещением по диаграмме Пенроуза I→II→III→O мы получаем увеличение количества канонических СО I→∞^1→∞^3 от единственной до произвольной. В плоском V_4 все СО тривиально канонические, голономные. Из них только в инерциальных $\nabla_\mu u_\nu=0$. Упомянутый путь I→O лежит между пространствами ОТО аристотелева (I) и галилеева типа (O).

5. Применим понятие канонической СО к решению проблемы Птолемей-Коперник. В литературе имеются противоречивые суждения о проблеме Птолемей—Коперник. С одной стороны, утверждается, что только существование привилегированной системы координат позволяет отдать преимущество гелиоцентрической системе перед геоцентрической [5]. С другой стороны, подчеркивается, что с точки зрения ма-

тематической разницы между системами Птолемея и Коперника нет, это различие начинается тогда, когда речь заходит о физическом содержании этих систем [6]. Заметим, что противопоставление физического содержания и математической трактовки неправомерно: физическое различие в рамках теории дано всегда как инвариантное математическое различие — по самому смыслу понятия теории. Поэтому скорее правы те, кто признают, что отсутствие понятия неинерциальной системы отсчета равносильно отсутствию определенного ответа по поводу указанной проблемы в рамках общей теории относительности [7].

Упомянутые противоречия не являются простыми паралогизмами, и возникающие трудности могут быть преодолены с помощью привлечения новых понятий и уточнения уже существующих. Именно произведем как бы удвоение понятия системы координат, отчасти следуя, например, Схоутену [8], и будем строго различать понятия системы координат и системы тетрад. Система координат представляет собой карту атласа пространства, который превращает его в многообразие. Система тетрад в многообразии определяется как гладкое поле взаимных векторов (репер и корепер).

Система координат порождает поле голономного натурального репера, образующего систему тетрад, принадлежащую данной системе координат [8]. Но, в отличие от системы координат, система тетрад представляет собой инвариант. Инвариант определяется как объект любого сорта, не изменяющийся при преобразовании координат [9]. Конкретно инвариант, или геометрический объект, определяется как некоторое соответствие между множеством упорядоченных множеств компонентов объекта и множеством допустимых систем координат [10]. Объекты любого сорта, зависящие от выбора системы координат, будем для краткости именовать ковариантами. Поскольку определяемый через коварианты (определяющие числа) геометрический объект задан единым законом преобразования на всем бесконечном множестве систем координат, то он приобретает черты инварианта.

Понятия систем координат и тетрад симметричны. Можно данную систему тетрад рассматривать с равным успехом в любой системе координат, и можно в одной и той же системе координат рассматривать любые системы тетрад. Этой двойственности соответствуют инвариантное равенство и равенство, справедливое в фиксированной системе координат [8]. Переход от одних инвариантов к другим с теми же определяющими числами (ковариантами) можно описывать с помощью операции включения и выключения индексов в фиксированной системе координат [11][1]. Хотя каждой системе координат можно сопоставить одну систему тетрад, природа этих понятий совершенно различна. Неголономная система локальных координат определяется с помощью голономной системы координат.

Всякая геометрическая или физическая теория имеет дело с геометрическими или физическими инвариантами, описываемыми не просто функциями, а классами функций, в том числе классами систем координат, т. е. общековариантна. Различие между инвариантами носит по определению инвариантный характер. Поскольку системы координат (по определению) не являются инвариантами (по отношению к преобразованию самой системы координат), их различие не инвариантно, т. е. все системы координат совершенно равноправны. Поэтому мы мо-

[1] Условие $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ определяет, например, гармоническую систему координат. Чтобы записать гармоническую систему тетрад, следует координатные индексы заменить на тетрадные.

жем сказать, что системы координат Птолемея и Коперника равноправны, а соответствующие системы тетрад различаются инвариантным образом. Для наших целей достаточно понятия системы отсчета. Инвариантного различия произвольных инвариантов самого по себе недостаточно. Различие систем отсчета Птолемея и Коперника приобретает абсолютный характер при их сравнении с естественно присущим самому гравитационному полю инвариантом, т. е. с канонической системой отсчета. Поскольку кривизна пространства — времени солнечной системы создается практически только Солнцем (и Юпитером), его мировая линия включена в каноническую конгруэнцию. Каноническая система отсчета практически не вращается (имеется в виду ее тензор вращения). Мировая линия Земли в отличие от Солнца образует касательные векторы, не удовлетворяющие уравнению (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук Р. Ф. Препринт ВНИИОФИ, № 70-5. М., 1970; «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 3, 350—352, 1970.
2. Полищук Р. Ф. ДАН СССР, 194, 62, 1970.
3. Пирани Ф. Сб. «Новейшие проблемы гравитации». М., ИЛ, 1961.
4. Зельманов А. Л. ДАН СССР, 107, 815; 1956; 124, 1959.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени, тяготения. М., Гостехиздат, 1955, стр. 474.
6. Инфельд Л. «Успехи физических наук», вып. 1, 166, 1956.
7. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник. М., «Наука», 1968, стр. 143.
8. Схоутен Я. А., Стройк Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1. М.—Л., ГИТТЛ, 1939.
9. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М., ИЛ, 1948.
10. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1955.

Поступила в редакцию
29.12 1970 г.

ГАИШ