ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1972

УДК 539.12.01

В. Р. ХАЛИЛОВ, Б. В. ХОЛОМАЙ

ОБ ИЗМЕНЕНИИ СРЕДНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ

Рассматривается задача о движении и излучении электрона в поле плоской электромагнитной волны круговой поляризации. Получены уравнения движения, которые описывают изменение квантовых чисел, характеризующих состояние электрона в волне, с учетом квантовых эффектов отдачи при излучении фотона. При $\hbar \to 0$ найденные решения переходят в соответствующие классические. Обсуждается вопрос об изменении средней энергии электрона.

Электромагнитное излучение электрона, движущегося в поле плоских волн, рассматривалось многими авторами [1, 2, 3]. В последнее время эта задача помимо методического приобретает и практический интерес, связанный с получением сильных электромагнитных полей от лазеров и с различными астрофизическими приложениями. В большинстве работ по этой проблеме изучались свойства электромагнитного излучения электрона (спектральный состав, угловое распределение излучения). К интересным результатам привел учет радиационного трения электрона. Так, в [4] показано, что энергия электрона в поле плоской волны при учете радиационного трения растет со временем. Этот результат был получен из решений классических уравнений движения электрона в поле плоской волны с учетом радиационного трения. В данной работе результаты работы [4] уточняются. Рассмотрение задачи проведено методами квантовой теории. Показано, что наряду с обычным классическим затуханием квантовых чисел, характеризующих состояние электрона, существует также их квантовая раскачка, учет которой приводит к некоторому изменению роста средней энергии электрона в волне.

1. Выберем вектор-потенциал электромагнитной волны в виде

$$\vec{A} = -\frac{cE_0}{\omega}\{\vec{e}_1 \sin \omega\xi - g\vec{e}_2 \cos \omega\xi\}, \qquad (1)$$

где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — орты двумерного ортогонального базиса $\xi = t - \frac{z}{c}$, а $g = \pm 1$ характеризует круговую поляризацию волны (правую и левую соответственно). Решение уравнения Клейна—Гордона и Дирака в поле такой конфигурации хорошо известны [3]. Квантовое состояние электрона (для простоты будем рассматривать бесспиновую частицу, подчиняющуюся уравнению Клейна—Гордона) характеризуется тремя квантовыми числами

$$\lambda = E - cp_3 = \left(\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}_{\perp}^{\,2} + p_3^2} - p_3\right)c, \text{ и } \vec{k}_{\perp} = \vec{p}/\hbar,$$

которые в классической теории являются интегралами движения электрона (более подробно об этом см. в [1, 2, 3]).

Средняя энергия электрона в поле плоской волны

$$\langle E\rangle = \int \Psi^{+} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \, d^3x$$

дается выражением

$$\langle E\rangle = E = mc^2 \frac{1 + \gamma^2 + \dfrac{k_{\perp}^2}{k_0^2}}{2\alpha}. \tag{2}$$

Здесь

$$k_0 = \frac{mc}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{mc^2}, \quad \gamma = \frac{eE_0}{mc\omega}.$$

Найдем изменение величин λ, $\vec{k}_{\perp}^{\,2}$ в результате электромагнитного излучения электрона в поле плоской волны. Для изменения λ и $\vec{k}_{\perp}^{\,2}$ легко получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= -\int d\lambda' \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\varkappa_{\max}} d\varkappa \, \delta(\varkappa - \varkappa_{\text{изл}}) (\lambda' - \lambda) W_{\lambda', \vec{k}'_{\perp}, \lambda, \vec{k}_{\perp}}, \\ \frac{dk_{\perp}^2}{dt} &= \int d\lambda' \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{\varkappa_{\max}} d\varkappa \, \delta(\varkappa - \varkappa_{\text{изл}}) (\vec{k}_{\perp} - \vec{k}'_{\perp})^2 W_{\lambda', \vec{k}'_{\perp}, \lambda, \vec{k}_{\perp}}, \end{aligned} \tag{3}$$

В (3) — $W_{\lambda', \vec{k}'_{\perp}, \lambda, \vec{k}_{\perp}}$ — вероятность перехода электрона из состояния λ, $\vec{k}_{\perp}$ в состояние λ', $\vec{k}'_{\perp}$ с излучением фотона, θ — угол между вектором фотона $\vec{\varkappa}$ и осью z. Удобнее, однако, в формулах (3) перейти к новому углу θ', связанному с θ соотношениями

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta' \sqrt{1 - \beta_3^2}}{1 + \beta_3 \cos\theta'}, \quad \cos\theta = \frac{\beta_3 + \cos\theta'}{1 + \beta_3 \cos\theta'}, \tag{4}$$

где

$$\beta_3 = \frac{1 + \gamma^2 - \alpha^2}{1 + \gamma^2 + \alpha^2}.$$

Подставляя в (3) явный вид $W_{\lambda', \vec{k}'_{\perp}, \lambda, \vec{k}_{\perp}}$, с учетом (4) можно получить соответственно

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{e^4E_0^2\alpha^2(1-\beta_3)}{m^2c^3\gamma^2(1+\gamma^2)}\sum n^2\int_0^\pi \frac{1-\cos\theta'}{[1+\eta(1-\cos\theta')]^3}\{q^2 I_n'^2(nq\sin\theta') +$$

$$+\operatorname{ctg}^2\theta' I_n^2(nq\sin\theta')\}\sin\theta'\,d\theta', \tag{5}$$

$$c^2\frac{d\vec{p}_\perp^{\,2}}{dt} = \frac{e^4E_0^2\alpha^2(1-\beta_3)}{m^2c^3\gamma^2(1+\gamma^2)}\hbar\omega\sum n^3\int_0^\pi\frac{\sin^3\theta'\,d\theta'}{[1+\eta(1-\cos\theta)]^4}\times$$

$$\times\{q^2 I_n'^2(nq\sin\theta') + \operatorname{ctg}^2\theta' I_n^2(nq\sin\theta')\}.$$

Здесь

$$q = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \qquad \eta = \frac{n\hbar\omega}{mc^2}\frac{\alpha}{1+\gamma^2}.$$

Параметр η характеризует эффекты квантовой отдачи при излучении фотона электроном. Особенно простое выражение получается для него в случае отсутствия движения электрона вдоль направления распространения волны. Тогда

$$\eta = \frac{n\hbar\omega}{mc^2\sqrt{1+\gamma^2}} = \frac{n\hbar\omega}{\varepsilon}.$$

Интегрирование формул (5) по $d\theta'$ будем проводить, предполагая параметр η малым и учитывая лишь первый член разложения по η в первой из формул (5) и нулевой член во второй. Полезно при этом рассмотреть два случая $\gamma \ll 1$ (случай слабой волны) и $\gamma \gg 1$ (сильная волна). В первом случае можно ограничиться лишь первым членом в сумме по $n(n=1)$. В результате найдем:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3}\frac{2\alpha^4}{1+\alpha^2}\left(1-\frac{21}{5}\gamma^2\frac{\hbar\omega}{mc^2}\alpha\right),$$

$$c^2\frac{d\vec{p}^{\,2}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3}\frac{4}{5}\frac{\alpha^4}{1+\alpha^2}\hbar\omega. \tag{6}$$

В другом предельном случае $\gamma \gg 1$ сумму по n можно заменить интегралом по непрерывной переменной n. После громоздких выкладок можно получить

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3}\frac{2\alpha^4}{1+\gamma^2+\alpha^2}\left(1-\frac{55\sqrt{3}}{24}\frac{E_0}{H_0}\alpha\right),$$

$$c^2\frac{d\vec{p}^{\,2}}{dt} = \frac{29\cdot 5}{12\sqrt{3}}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3}\frac{\alpha^4(1+\gamma^2)^{5/2}}{\gamma^2(1+\gamma^2+\alpha^2)}\hbar\omega. \tag{7}$$

В формуле (7) $H_0 = \frac{m^2c^3}{e\hbar}$ критическое магнитное поле. Выражения (6) и (7) являются уравнениями, характеризующими изменение квантовых чисел электрона за счет электромагнитного излучения. Первый член в формуле для $\frac{d\lambda}{dt}$ дает обычное радиационное затухание классического интеграла движения λ, второй $(\sim\hbar)$ характеризует квантовую раскачку, связанную, как это легко заметить с эффектами отдачи при излучении фотона электроном. В выражение $\frac{d\vec{k}_\perp^2}{dt}$ входит только квантовый член. Этот результат является следствием того, что начальный поперечный импульс электрона, в силу нашего выбора равен 0.

Переходя к переменной $\alpha = \frac{\lambda}{mc^2}$ и вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\,\frac{e^2\omega}{mc^3}\gamma^2 \text{ и } \tilde{\varepsilon} = \frac{55\sqrt{3}}{24}\,\frac{E_0}{H_0} \ll 1,$$

вместо (7) запишем

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon\frac{2\omega\alpha^4}{1+\gamma^2+\alpha^2}(1-\tilde{\varepsilon}\alpha). \tag{8}$$

Интегрируя (8) и оставляя лишь наибольшее по $\tilde{\varepsilon}$ члены, получим

$$-\frac{(1+\gamma^2)}{2}\left(\frac{1}{3\alpha^3}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{2\alpha^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\tilde{\varepsilon}\ln\frac{1-\tilde{\varepsilon}\alpha}{\alpha}\right)+\text{const} = -\varepsilon\omega t. \tag{9}$$

Для больших времен ($\omega t\to\infty$) в (9) нужно оставить лишь основные члены

$$\frac{1}{6\alpha^3}+\frac{\tilde{\varepsilon}}{4\alpha^2} = \frac{\varepsilon\omega t}{1+\gamma^2}+\text{const}.$$

Константа определяется из начальных условий.

Соответствующее классическое решение в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{6\alpha^3} = \frac{\varepsilon\omega t}{1+\gamma^2}+\text{const}. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), заключаем, что затухание величины α с учетом квантовых поправок происходит более медленно.

Обозначим $\frac{1}{\alpha} = x$. Тогда вместо (9) получим уравнение для x:

$$2x^3+3\tilde{\varepsilon}x^2 = 12\frac{\varepsilon\omega t}{1+\gamma^2}. \tag{11}$$

Приближенное решение этого уравнения, справедливое для больших времен t, имеет вид

$$x = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon\omega t}{1+\gamma^2}}-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}. \tag{12}$$

Подставляя полученное решение (12) в (2), найдем изменение средней энергии электрона для больших времен $\omega t \gg 1$:

$$\langle E\rangle = mc^2\frac{1+\gamma^2}{2\alpha} = \frac{mc^2}{2}(1+\gamma^2)\left[\left(\frac{6\,\varepsilon\omega t}{1+\gamma^2}\right)^{1/3}-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}\right]. \tag{13}$$

Таким образом, средняя энергия электрона, как и при классическом рассмотрении, увеличивается, однако рост ее несколько замедляется. При $\hbar=0$ формула (13) переходит в выражение, полученное из классической теории. Физически этот эффект связан со сдвигом фазы скорости электрона на $\frac{\pi}{2}$, при учете радиационного трения. Покажем, что это действительно так. Уравнения движения электрона с учетом торможения радиационным трением имеют вид

$$\alpha \frac{du_x}{d\chi} = -V_x(\chi) - \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}\left[u_x\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2u_x}{d\eta^2}\right],$$

$$\alpha \frac{du_y}{d\chi} = -V_y(\chi) - \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}\left[u_y\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2u_y}{d\eta^2}\right],$$

$$\alpha \frac{du_\xi}{d\chi} = -\alpha\vec{V}\vec{u}_\perp - \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}\left[u_\xi\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2u_\xi}{d\eta^2}\right],$$

$$\alpha \frac{d\gamma}{d\chi} = -\alpha\vec{V}\vec{u}_\perp - \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}\left[\gamma\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\gamma}{d\eta^2}\right]. \tag{14}$$

Здесь введены обозначения

$$\vec{V} = \frac{e\vec{E}}{mc\omega}, \quad \chi = \omega\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \zeta = \frac{\omega z}{c}, \quad \eta = \omega\tau, \quad \frac{d\chi}{d\eta} = \alpha,$$

τ — собственное время электрона. Умножая второе из уравнений (14) на i и складывая с первым, получим уравнение для переменной $\psi = u_x + iu_y$:

$$\alpha \frac{d\psi}{d\chi} = -[V_1(\chi) + iV_2(\chi)] - \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}\left[\psi\left(\frac{du^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{d\eta^2}\right]. \tag{15}$$

Решение для ψ можно искать методом итераций в виде разложения по малому параметру $\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{mc^3}$: $\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1$. Тогда из (15) получим два уравнения для определения функций ψ_0 и ψ_1:

$$\alpha\frac{d\psi_0}{d\chi} = -[V_1(\chi) + iV_2(\chi)],$$

$$\alpha\frac{d\psi_1}{d\chi} = -\left[\psi_0\left(\frac{du_0^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\psi_0}{d\eta^2}\right], \tag{16}$$

Второе уравнение легко преобразовать к виду

$$\frac{d\psi_1}{d\chi} = 2\alpha\frac{d^2\psi_0}{d\chi^2} = -\frac{2d}{d\chi}[V_1(\chi) + iV_2(\chi)]. \tag{17}$$

Отсюда имеем решение для ψ_1 и ψ:

$$\psi_1 = -2[V_1(\chi) + iV_2(\chi)] + \mathrm{const}, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1. \tag{18}$$

Подставляя найденные решения в последнее из уравнений (14), найдем уравнение для γ в случае когда волна поляризована по кругу

$$\alpha\frac{d\gamma}{d\chi} = -\alpha\vec{V}\vec{u}_\perp^0 + \frac{2\varepsilon e^2E_0^2\alpha}{m^2c^2\omega^2} - \varepsilon\left[\gamma\left(\frac{du_0^\mu}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\gamma_0}{d\eta^2}\right]. \tag{19}$$

Очевидно, второй член в правой части уравнения (19) характеризует эффект увеличения энергии электрона, пропорциональный χ. Аналогичный результат получается и для компонента u. Для того чтобы от переменной χ перейти к переменной t, нужно определить χ из уравнения

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2\alpha^2}{1+\gamma^2+\alpha^2}\omega, \tag{20}$$

причем α определится из уравнения (10). И в результате для больших времен t найдем

$$\chi = \sqrt[3]{\frac{6\omega t}{\varepsilon^2 (1+\gamma^2)}} + \mathrm{const}. \tag{21}$$

Таким образом учет радиационного трения электрона при движении в плоской волне приводит к долговременным эффектам. Более интересными являются результаты, полученные при включении в рассматриваемую задачу еще однородного и постоянного магнитного поля, направленного вдоль вектора распространения электромагнитной волны. Эти результаты будут опубликованы позднее.

В заключение авторы благодарят проф. И. М. Тернова за обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, **46**, 776, 1964.
2. Гольдман И. И. ЖЭТФ, **46**, 1412, 1964.
3. Тернов И. М., Багров В. Г., Хапаев А. М., Клоповский К. С. «Изв. вузов», физика № 8, 77, 1967.
4. Gunn J. E., Ostriker J. P. California Junt. of Technologi Preprint. U. S. A. 1970.
5. Volkov D. M. Zs. Phys., 94, 250, 1935.

Поступила в редакцию
19.4 1971 г.

Кафедра
теоретической физики