Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1972

УДК 530.12:531.51:530.145

Э. А. АСЛАНЯН

НЕКОТОРЫЕ КВАНТОВО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЦЕНТРАЛЬНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Рассмотрены следующие процессы в центральных классических полях: однофотонная и одногравитонная аннигиляции спинорной пары, электромагнитное и гравитационное тормозные излучения электрона, а также рождение спинорной пары фотоном или гравитоном. В качестве внешнего поля берется или кулоново поле ядра или слабое поле Шварцшильда. Расчет данных эффектов, в которых участвуют реальные или виртуальные гравитоны, производится на основе метода квантования слабого гравитационного поля, предложенного Гупта. Получены выражения для дифференциальных сечений рассматриваемых процессов.

Данная работа посвящена расчету ряда квантово-гравитационных эффектов. Д. Д. Иваненко [1] высказал гипотезу о возможности взаимных превращений квантов гравитационного и обычных полей. Развиты эти положения в работах Ю. С. Владимирова [2, 3], Н. В. Мицкевича [4], Р. Гупта [5] и других.

В настоящей работе рассмотрены следующие процессы в центральных классических полях: однофотонная и одногравитонная аннигиляции спинорной пары, электромагнитное и гравитационное тормозные излучения, а также рождение спинорной пары фотоном и гравитоном. В качестве внешнего поля берется или кулоново поле ядра с зарядом Ze, потенциал которого имеет вид

$$A_\alpha^{\text{кл}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i(qx)} \varphi_\alpha(\vec{q})\, d\vec{q}, \tag{1}$$

где

$$q = (0, \vec{q});\ \varphi_\alpha(\vec{q}) = (\varphi(\vec{q}), 0, 0, 0); \tag{2}$$

$$\varphi(\vec{q}) = \frac{Ze}{(2\pi)^{3/2} (\vec{q})^2},$$

или слабое поле Шварцшильда, метрика которого в изотропных координатах имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - 4\frac{c}{r}\right) dx_0^2 + \left(1 + 4\frac{c}{r}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \tag{3}$$

где $c = \frac{\varkappa M}{32\pi}$ (M — масса центрального тела), а $\varkappa$ связана с ньютоновской константой тяготения $\varkappa = \frac{16\pi G}{c^2}$.

Расчет данных эффектов, в которых участвуют реальные или виртуальные гравитоны, производится на основе метода квантования слабого гравитационного поля, предложенного Гупта [5]. Величины $h_{\mu\nu}$ $h^{\alpha}_{\alpha}=h$, описывающие гравитацию для внешнего поля с метрикой (3), все обращаются в нуль, за исключением

$$h_{00}(x)=h^{00}(x)=h(x)=-\frac{M\sqrt{\varkappa}}{4\pi r}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i(qx)}h(\vec{q})\,d\vec{q}, \tag{4}$$

где

$$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad h(\vec{q})=-\frac{M\sqrt{\varkappa}}{(2\pi)^{3/2}|\vec{q}|^2}.$$

В качестве лагранжиана взаимодействия возьмем следующий [3, 4] (метрика псевдоевклидова; учтены члены второго порядка по $\sqrt{\varkappa}$):

$$\begin{aligned}
L_{\text{вз}} &= e\psi\bar{\gamma}^{\mu}A_{\mu}\psi+\frac{\sqrt{\varkappa}}{4}\left(-i\bar{\psi}\gamma_{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\varepsilon}}+i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\varepsilon}}\gamma_{\omega}\psi\right)h^{\omega\varepsilon}(x)+\frac{\sqrt{\varkappa}}{4}mh\bar{\psi}\psi+\\
&+\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}h_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x_{\nu}}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}\right)-\\
&-\frac{\sqrt{\varkappa}}{4}h\left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x_{\nu}}\right)-e\sqrt{\varkappa}\,\bar{\psi}A^{\mu}h_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha}\psi+\\
&+\sqrt{\varkappa}\left(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}h_{\beta\varepsilon}\frac{\partial^2 h^{\varepsilon}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\delta^{\mu\nu}+\frac{1}{8}h^{\mu\nu}\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial h}{\partial x^{\nu}}+\right.\\
&+\frac{1}{4}h^{\mu\nu}\frac{\partial h^{\rho\tau}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial h_{\rho\tau}}{\partial x^{\nu}}-\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial h^{\lambda}_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial h_{\lambda\beta}}{\partial x^{\nu}}\delta^{\mu\nu}-\frac{1}{4}h^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial h}{\partial x^{\nu}}\delta^{\mu\nu}+\\
&\left.+\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial h^{\lambda\nu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{\partial h^{\rho}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial h^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)+\\
&+\varkappa h^{\omega\varepsilon}h^{\sigma\tau}\left[m\bar{\psi}\psi\left(\frac{1}{2}\delta_{\omega\sigma}\delta_{\varepsilon\tau}-\frac{3}{32}\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma\tau}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{i}{16}\bar{\psi}(\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta\tau}-\delta_{\omega\tau}\delta_{\beta\varepsilon})\gamma^{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\sigma}}-\frac{i}{16}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\sigma}}(\delta_{\omega\varepsilon}\delta_{\beta\tau}-\delta_{\omega\tau}\delta_{\beta\varepsilon})\gamma^{\beta}\psi\right]-\\
&-\varkappa\frac{i}{32}\bar{\psi}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\psi h_{\alpha\mu}\frac{\partial h^{\alpha}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского.

Рассмотрим одногравитонную аннигиляцию пары в поле ядра; здесь $A_{\mu}\to A_{\mu}+A_{\mu}^{\text{кл}}$ и лагранжиан взаимодействия принимает вид:

$$\begin{aligned}
L_{\text{вз}} &= e\bar{\psi}\gamma^{\mu}(A_{\mu}+A_{\mu}^{\text{кл}})\psi+\\
&+\frac{\sqrt{\varkappa}}{4}\left(-i\bar{\psi}\gamma_{\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\varepsilon}}+i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\varepsilon}}\gamma_{\omega}\psi\right)h^{\omega\varepsilon}(x)+\\
&+\sqrt{\varkappa}\left(\frac{\partial A_{\nu}^{\text{кл}}}{\partial x_{\lambda}}\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial A_{\nu}^{\text{кл}}}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x_{\nu}}\right)h_{\mu\lambda}(x).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь, как и в дальнейшем, опущены члены, дающие нулевой вклад в матричный элемент, который в данном случае имеет вид (используем коммутатор $[h_{\mu\nu}(x),\ h_{\omega\varepsilon}(y)]_- = i\,(\delta_{\mu\nu}\delta_{\omega\varepsilon} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\varepsilon} - \delta_{\mu\varepsilon}\delta_{\nu\omega})\,D_0^c(x-y)$):

$$F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k) = \frac{\varphi(q)\, ie\sqrt{\varkappa}}{(2\pi)^2\sqrt{2k}}\,\bar{v}^{(-)}(\vec{p}_2)\left\{\left[-\frac{(p_1hp_1)}{(p_1k)} - \frac{(p_2hp_2)}{(p_2k)} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{(p_1hp_1) + 2(p_1hp_2) + (p_2hp_2)}{m^2 + (p_1p_2)}\right]\gamma^\circ - \frac{k}{m^2 + (p_1p_2)}(p_1\hat{h}) - \frac{k}{m^2 + (p_1p_2)}(p_2\hat{h}) +$$
$$\left. + \frac{1}{2(p_1k)}\gamma^\circ\hat{k}(p_1\hat{h}) + \frac{1}{2(p_2k)}(p_2\hat{h})\,\hat{k}\gamma^\circ\right\} v^{(-)}(\vec{p}_1), \tag{7}$$

где p_1, p_2, k — импульсы электрона, позитрона и гравитона;

$$(p_ihp_j) \equiv p_ih_{\mu\nu}p_j^\nu;\ (p_i\,\hat{h}) \equiv p_i^\mu h_{\mu\nu}\gamma^\nu,\ (i, j = 1, 2).$$

Квадрат модуля матричного элемента, усредненный по спинам спинорных частиц, выглядит следующим образом:

$$|F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)|^2 = \frac{e^2\varkappa\varphi^2(\vec{q})}{2^5(2\pi)^4\varepsilon_1\varepsilon_2 k}(I_1 + I_2), \tag{8}$$

причем

$$I_2(p_1, p_2, k) = I_1(p_2, p_1, k) \tag{8а}$$

и имеет место равенство:

$$I_1 = A_1 + \frac{1}{(p_1k)}A_2 + \frac{1}{(p_2k)}A_3 + \frac{1}{(p_1k)(p_2k)}A_4 + \frac{1}{m^2 + (p_1p_2)}A_5 +$$
$$+ \frac{1}{(p_1k)[m^2 + (p_1p_2)]}A_6 + \frac{1}{(p_2k)[m^2 + (p_1p_2)]}A_7, \tag{8б}$$

где

$$A_1 = -2(p_1hhp_2),$$

$$A_2 = 8(p_1hp_1)^2 + 8(p_1hp_1)(p_1hp_2) + 12(p_1hp_1)(p_2hp_2) +$$
$$+ [4k\varepsilon_1 + 2(p_2k)](p_1hhp_1) + 4k(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(p_1hhp_2),$$

$$A_3 = 4(p_1hp_1)^2[(p_2k) - (p_1p_2) - 2\varepsilon_2^2 - m^2],$$

$$A_4 = 2k^2(p_1hp_2)^2 - 2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 2(p_1p_2) + 2m^2](p_1hp_1)(p_2hp_2) -$$
$$- 2[m^2 + (p_1p_2)]k^2(p_1hhp_2),$$

$$A_5 = -4(p_1hp_1)^2 - 8(p_1hp_1)(p_1hp_2) - 4(p_1hp_1)(p_2hp_2) -$$
$$-4k\varepsilon_1(p_1hhp_1) - 2k^2(p_1hhp_2),$$

$$A_6 = [16\varepsilon_2^2 - 4(p_2k)](p_1hp_1)^2 + [16\varepsilon_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - 8(p_2k)](p_1hp_1)(p_1hp_2) -$$
$$- 4k^2(p_1hp_2)^2 + [4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - 4(p_2k)](p_1hp_1)(p_2hp_2) -$$
$$- 4k\varepsilon_1(p_2k)(p_1hhp_1) - 4k\varepsilon_1(p_2k)(p_1hhp_2),$$

$$A_7 = -8\varepsilon_2^2(p_1hp_1)^2 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2(p_1hp_1)(p_2hp_2) +$$
$$+ 16\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(p_1hp_1)(p_1hp_2) - 4(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2(p_1hp_2)^2.$$

Здесь введено обозначение $(p_i hhp_j) \equiv p_i^{\mu} h_{\mu\nu} h_{\alpha}^{\nu} p_j^{\alpha}$ $(i,\ j = 1,\ 2)$. Результаты суммирования по поляризациям гравитона таковы:

$$
\begin{aligned}
(p_i hp_i)^2 &= p_i^4 \sin^4 \theta_i, \\
(p_i hp_i)(p_i hp_j) &= p_i^3 p_j \sin^3 \theta_i \sin \theta_j \cos \varphi, \\
(p_i hp_i)(p_j hp_j) &= p_i^2 p_j^2 \sin^2 \theta_i \sin^2 \theta_j \cos 2\varphi, \\
(p_i hp_j)^2 &= p_i^2 p_j^2 \sin^2 \theta_i \sin^2 \theta_j, \\
(p_i hhp_i) &= -2p_i^2 \sin^2 \theta_i, \\
(p_i hhp_j) &= -2p_i p_j \sin \theta_i \sin \theta_j \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где θ_i — угол между $\vec{p}_i$ и $\vec{k}$, а φ — угол между плоскостями $(\vec{k}, \vec{p}_i)$ и $(\vec{k}, \vec{p}_j)$; Везде $i, j = 1, 2$.

Теперь можно найти вероятность аннигиляции в единицу времени:

$$
dN^{\text{Ан}} = n_э n_p d\sigma^{\text{Ан}} = (2\pi)^5 n_э n_p \,|\, F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)\,|^2 k^2 d\Omega_k \big|_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-k=0}, \tag{10}
$$

где $\varepsilon_1 \equiv p_1^0$; $\varepsilon_2 \equiv p_2^0$; $n_э$ и n_p — плотности электронов и позитронов, а $d\sigma^{\text{Ан}}$ — величина, обобщающая понятие дифференциального сечения и имеющая в используемой системе единиц ($c = \hbar = 1$) размерность $см^5$.

$$
d\sigma^{\text{Ан}} = (2\pi)^5 \,|\, F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)\,|^2 k^2 d\Omega_k \big|_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-k=0}. \tag{11}
$$

Далее рассмотрим однофотонную аннигиляцию спинорной пары в слабом поле Шварцшильда. Здесь гравитация выступает только в качестве внешнего поля, поэтому обозначение $h_{\mu\nu}^{\text{кл}}$ вводить не будем. В качестве лагранжиана взаимодействия следует взять первые три строки из (5). Матричный элемент процесса имеет вид

$$
\begin{aligned}
F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k) = {} & \frac{ie\sqrt{\varkappa}\, h(\vec{q})}{2(2\pi)^2\sqrt{2k}}\, \bar{v}^{(-)}(\vec{p}_2) \left\{ \left[\frac{m(p_1 e)}{2(p_1 k)} - \frac{m(p_2 e)}{2(p_2 k)} \right] + \right. \\
& + \left[\frac{\varepsilon_1 (p_2 e)}{(p_2 k)} + \frac{\varepsilon_2 (p_1 e)}{(p_1 k)} - k\, \frac{(p_2 e) + (p_1 e)}{m^2 + (p_1 p_2)} \right] \gamma^0 + \frac{2k^2 - (p_2 k) - (p_1 k)}{2[m^2 + (p_1 p_2)]}\, \hat{e} + \\
& + \frac{(p_2 e) + (p_1 e)}{2[m^2 + (p_1 p_2)]}\, \hat{k} + \left[\frac{m}{4(p_2 k)} + \frac{m}{4(p_1 k)} \right] \hat{e}\hat{k} - \\
& \left. - \frac{\varepsilon_2}{2(p_1 k)}\, \gamma^0 \hat{k}\hat{e} - \frac{\varepsilon_1}{2(p_2 k)}\, \hat{e}\hat{k}\gamma^0 \right\} v^{(-)}(\vec{p}_1),
\end{aligned} \tag{12}
$$

где k — импульс фотона.

Квадрат модуля матричного элемента, усредненный по спинам спинорных частиц, запишем в виде аналогичном (8):

$$
|\, F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)\,|^2 = \frac{e^2 \varkappa h^2(\vec{q})}{2^7 (2\pi)^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 k}\, (I_1 + I_2), \tag{13}
$$

причем справедливы равенства (8а), (8б) со следующими значениями для A_n $(n = 1, \ldots, 7)$:

$$
A_1 = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 + m^2,
$$

$$A_2 = [4k\varepsilon_2 - m^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2](p_1 l)^2 + [2m^2 - 4\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 + 4k\varepsilon_2](p_1 l)(p_2 l) +$$
$$+ (p_2 k)(m^2 - 4\varepsilon_2^2) - 4m^2k^2 - 8k^2\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - 4k\varepsilon_2[2k^2 - (p_2 k) - (p_1 k)],$$
$$A_3 = (p_1 l)^2 [(m^2 - 4\varepsilon_2^2)((p_1 p_2) - (p_2 k) - m^2) - 8\varepsilon_2^4],$$
$$A_4 = 2k^2m^2(p_1 l)^2 + 4k^2\varepsilon_1\varepsilon_2[m^2 + (p_1 p_2)] + [(4\varepsilon_1\varepsilon_2 + m^2)(m^2 - (p_1 p_2)) -$$
$$- 2m^2k^2 + 8\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2](p_1 l)(p_2 l).$$
$$A_5 = 2(2\varepsilon_2^2 - m^2)(p_1 l)^2 + [4(p_1 l)(p_2 l) - 4k^2 + 2(p_2 k) +$$
$$+ 2(p_1 k)](2\varepsilon_1^2 - m^2) + [2k^2 - (p_2 k) - (p_1 k)]^2,$$
$$A_6 = [2(2\varepsilon_2^2 - m^2)(2k^2 - 2(p_2 k) - (p_1 k)) + 8k\varepsilon_2^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) +$$
$$+ 2m^2k^2(\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2)](p_1 l)^2 - 2m^2k^2(p_2 l)^2 + 2(p_2 k)[2k^2 - (p_2 k) -$$
$$- (p_1 k)](2\varepsilon_1\varepsilon_2 + m^2) + [4m^2k(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - 16k\varepsilon_1\varepsilon_2^2](p_1 l)(p_2 l),$$
$$A_7 = [2(4k\varepsilon_2 - (p_2 k))(p_2 k) - 8k^2\varepsilon_2^2](p_1 l)^2 +$$
$$+ [-8(p_2 k)k\varepsilon_1 + 2(p_1 k)(p_2 k) + 8k^2\varepsilon_1\varepsilon_2](p_1 l)(p_2 l).$$

Суммирование по поляризациям фотона дает

$$(lp_1)^2 = p_1^2 \sin^2\theta_1, \quad (lp_2)^2 = p_2^2 \sin^2\theta_2,$$
$$(p_1 l)(p_2 l) = p_1 p_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi. \tag{14}$$

(здесь также имеет место (11)).

Далее, рассмотрим одногравитонную аннигиляцию в слабом поле Шварцшильда. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$L_{\text{вз}} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{4}(h^{\omega\varepsilon} + h^{\omega\varepsilon\text{кл}})\left(-i\bar{\psi}\gamma_\omega\frac{\partial\psi}{\partial x^\varepsilon} + i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\varepsilon}\gamma_\omega\psi\right) + \frac{\sqrt{\varkappa}}{4}m(h + h^{\text{кл}})\bar{\psi}\psi +$$
$$+ \sqrt{\varkappa}\left(\frac{1}{2}h^{\alpha\beta\text{кл}}h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu\text{кл}}h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu\partial x^\nu} +\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\text{кл}}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}h^{\alpha\beta}h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\frac{\partial h^{\text{кл}}}{\partial x^\mu}h^{\mu\nu}\frac{\partial h}{\partial x^\nu} + \frac{1}{4}h^{\text{кл}\mu\nu}\frac{\partial h^{\rho\tau}}{\partial x^\mu}\frac{\partial h_{\rho\tau}}{\partial x^\nu} +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial h^{\rho\tau\text{кл}}}{\partial x^\mu}h^{\mu\nu}\frac{\partial h_{\rho\tau}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h^{\rho\text{кл}}_\mu}{\partial x^\lambda}h^{\mu\nu}\frac{\partial h^\lambda_\nu}{\partial x^\rho} - \frac{1}{4}\frac{\partial h^{\text{кл}}}{\partial x^\mu}h^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right) +$$
$$+ \frac{i\varkappa}{16}h^{\text{кл}}h^\sigma_\beta\left(\bar{\psi}\gamma^\beta\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\sigma}\gamma^\beta\psi\right). \tag{15}$$

Выпишем матричный элемент процесса, используя формулу:

$$\overline{h_{\mu\nu}(x)h_{\alpha\beta}}(y) = i(\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})D_0^c(x - y).$$

$$F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k) = \frac{i\varkappa h(\vec{q})}{4(2\pi)^2\sqrt{2k}}\bar{v}^{(-)}(\vec{p}_2)\left\{-m\frac{(p_1 h p_1)}{(p_1 k)} - m\frac{(p_2 h p_2)}{(p_2 k)} +\right.$$
$$+ m\frac{(p_1 h p_1) + 2(p_1 h p_2) + (p_2 h p_2)}{m^2 + (p_1 p_2)} + \left[\frac{2\varepsilon_1(p_2 h p_2)}{(p_2 k)} - \frac{2\varepsilon_2(p_1 h p_1)}{(p_1 k)} +\right.$$

$$+\frac{2\varepsilon_1(p_1hp_1)+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(p_1hp_2)-2(p_2hp_2)\varepsilon_2}{m^2+(p_1p_2)}\Bigg]\gamma^0+\frac{m}{2(p_1k)}\hat{k}(p_1\hat{h})+$$

$$+\frac{m}{2(p_2k)}(p_2\hat{h})\hat{k}+\left[\frac{2k\varepsilon_1+(kp_1)+(kp_2)}{m^2+(p_1p_2)}-\frac{1}{2}\right](p_1\hat{h})-$$

$$-\left[\frac{2k\varepsilon_2+(kp_1)+(kp_2)}{m^2+(p_1p_2)}-\frac{1}{2}\right](p_2\hat{h})+\frac{\varepsilon_2}{(p_1k)}\gamma\hat{k}(p_1\hat{h})-$$

$$-\frac{\varepsilon_1}{(p_2k)}(p_2\hat{h})\hat{k}\gamma^0\Bigg\}v^{(-)}(\vec{p}_1), \qquad (16)$$

где k — импульс гравитона.

Квадрат матричного элемента, усредненный по спинам спинорных частиц, имеет вид

$$|F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)|^2=\frac{\varkappa^2h^2(\vec{q})}{2^9(2\pi)^4\varepsilon_1\varepsilon_2k}(I_1+I_2). \qquad (17)$$

Здесь также справедливы равенства (8а) и (8б). Выражения для коэффициентов A_n в этом процессе трудно обозримы и будут приведены лишь различные предельные по импульсам частиц случаи.

Исследуем некоторые предельные случаи трех рассмотренных типов аннигиляции спинорной пары. Результаты выписаны в таблице 1.

Для сравнения даны сечения хорошо изученной однофотонной аннигиляции в поле ядра (см., например, [7]). Сначала рассмотрен случай нерелятивистской пары, далее — аннигиляция ультрарелятивистского позитрона на нерелятивистском электроне и, наконец, случай ультрарелятивистской пары при $\vec{p}_1=-\vec{p}_2\equiv\vec{p}$.

Используя полученные для $[F^{\text{Ан}}(p_1, p_2, k)]^2$ формулы, можно рассмотреть три эффекта типа тормозного излучения. Так, зная квадрат модуля матричного элемента для одногравитонной аннигиляции в поле ядра, запишем, используя кросс-симметрию, аналогичное выражение для гравитационного тормозного излучения электрона по формуле

$$[F^{\text{торм}}(p_1, p_2, k]^2=2[F^{\text{Ан}}(p_1,-p_2, k)]^2. \qquad (18)$$

Дифференциальное сечение процесса будет иметь вид

$$d\sigma^{\text{торм}}=(2\pi)^2[F^{\text{торм}}(p_1, p_2, k)]^2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{p_2}{p_1}k^2dkd\Omega_{p_2}d\Omega_k\Big|_{\varepsilon_1-\varepsilon_2-k=0}. \qquad (19)$$

Теперь p_2 — импульс электрона в конечном состоянии.

Совершенно аналогично можно найти квадраты модулей матричных элементов электромагнитного тормозного излучения электрона в слабом поле Шварцшильда и гравитационного тормозного излучения электрона в том же поле и записать (19), т. е. выражения для сечений. В формуле (18) учтен разный характер суммирования и усреднения по спинам аннигиляции и тормозного излучения.

Предельные случаи для этих процессов представлены в таблице 2. Первым выписан классический предел, а затем случай, когда ультрарелятивистский электрон после излучения бозона становится нерелятивистским. Для сравнения помещен случай электродинамики.

Таблица 1

Аннигиляция спинорной пары		Кулоново поле ядра с зарядом Ze	Поле Шварцшильда массы M
	в фотон	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^6}{Z^6(2\pi)^2m^7}(p_1^2\sin^2\theta_1 + p_2^2\sin^2\theta_2)\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^6}{3\cdot 2^4(2\pi)\,m^7}(p_1^2+p_2^2)$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^8(2\pi)^2\,m^3}\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^7(2\pi)\,m^3}$
		$d\sigma_{\text{кл.,у.рел}} = \frac{Z^2e^6}{2^3(2\pi)^2\,m^2p_2^3}\,\frac{\sin^2\theta_2}{(1-\cos\theta_2)^3}\,d\Omega_k$	$d\sigma_{\text{кл.,у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^8(2\pi)^2\,m^2p_2}\,\frac{\sin^2\theta_2}{(1-\cos\theta_2)^2}\,d\Omega_k$
		$d\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^6}{2^3(2\pi)^2\,p^5}\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^6}{2^2(2\pi)\,p^5}$	$d\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^7(2\pi)^2\,p^3}\cos^2\theta\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{3\cdot 2^6(2\pi)\,p^3}$
	в гравитон	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^8(2\pi)^2\,m^7}\,[\vec{k}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)]^2\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{3\cdot 2^4(2\pi)\,m^5}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^3}{2^6(2\pi)^2\,m^5}\,[\vec{k}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)]^2\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^3}{3\cdot 2^2(2\pi)\,m^3}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^2$
		$d\sigma_{\text{кл.,у.рел}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^5(2\pi)^3\,m^2p_2}\,\frac{\sin^2\theta_2(2-\sin^2\theta_2)}{(1-\cos\theta_2)^2}\,d\Omega_k$	$d\sigma_{\text{кл.,у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^3p_2}{2^8(2\pi)^2\,m^2}\times$ $\times\frac{\sin^2\theta_2(15-6\cos\theta_2-5\cos^2\theta+2\cos^3\theta_2)}{(1-\cos\theta_2)^2}\,d\Omega_k$
		$d\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^5(2\pi)^2\,p^3}\sin^2\theta\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{3\cdot 2^3(2\pi)\,p^3}$	$d\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^3}{2^9(2\pi)^2\,p}\sin^2\theta\,(130-49\sin^2\theta)\,d\Omega_k$ $\sigma_{\text{у.рел}} = \frac{227}{15}\,\frac{M^2\varkappa^3}{2^6(2\pi)\,p}$

Таблица 2

		Кулоново поле ядра с зарядом Ze	Поле Шварцшильда массы M
Тормозное излучение электрона	Электромагнитное	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^6}{2(2\pi)^5}\frac{dk}{k^3}\frac{p_2}{p_1}\frac{[\vec{k}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)]^2}{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^4}\,d\Omega_{p_2}\,d\Omega_k$ $\int\limits_{\Omega_{p_2},\Omega_k} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{2Z^2e^6}{3(2\pi)^3}\frac{dk}{k}\left[\frac{2p_2}{p_1(p_1+p_2)^2}-\frac{1}{p_1^2}\ln\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right]$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2m^2}{2^5(2\pi)^5}\frac{p_2}{p_1}\frac{dk}{k^3}\frac{[\vec{k}(\vec{p}_1-\overleftarrow{p}_2)]^2}{(\vec{p}_1-\vec{p}_2)^4}\,d\Omega_{p_2}d\Omega_k$ $\int\limits_{\Omega_{p_2},\Omega_k} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2m^2}{3\cdot 2^3(2\pi)^3}\frac{dk}{k}\left[\frac{2p_2}{p_1(p_1+p_2)^2}-\frac{1}{p_1^2}\ln\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right]$
		$d\sigma_{\text{у. рел}} = \frac{Z^2e^6}{2^4(2\pi)^5}\frac{p_2}{m}\frac{dk}{k^3}\frac{\sin^2\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^3}\,d\Omega_k d\Omega_{p_2}$	$d\sigma_{\text{у. рел}} = \frac{M^2e^2\varkappa^2}{2^7(2\pi)^5}\frac{p_2}{m}\frac{dk}{k}\frac{\sin^2\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^2}\,d\Omega_k d\Omega_{p_2}$
	Гравитационное	$d\sigma_{\text{кл}} - \frac{2^3Z^2e^4\varkappa}{15(2\pi)^3}\frac{dk}{k}\left(5\frac{p_2}{p_1}+\frac{3(p_1^2+p_2^2)}{2p_1^2}\ln\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right)$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^3m^2}{2\cdot 15(2\pi)^3}\frac{dk}{k}\left(5\frac{p_2}{p_1}+3\frac{(p_1^2+p_2^2)}{2p_1^2}\ln\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right)$
		$d\sigma_{\text{у. рел}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^4(2\pi)^5}\frac{p_2}{m}\frac{dk}{k}\frac{\sin^2\theta_1(2-\sin^2\theta_1)}{(1-\cos\theta_1)^2}\,d\Omega_{p_2}d\Omega_k$	$d\sigma_{\text{у. рел}} = \frac{M^2\varkappa^3}{2^7(2\pi)^5}\frac{p_2}{m}\,kdk\times$ $\times\frac{\sin^2\theta_1(13-8\cos\theta_1+5\cos^2\theta_1+2\cos^3\theta_1)}{(1-\cos\theta_1)^2}\,d\Omega_k d\Omega_{p_2}$

Таблица 3

		Кулоново поле ядра с зарядом Ze	Поле Шварцшильда массы M
Рождение спинорной пары	Фотоном	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^6}{2^7(2\pi)^5 m^8} p_1^2 p_2 dp_1 (p_1^2 \sin^2\theta_1 + p_2^2 \sin^2\theta_2)\, d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$ $\int\limits_{\Omega_{p_1},\Omega_{p_2}} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^6}{3\cdot 2^5 (2\pi)^3 m^8} p_1^2 p_2 dp_1 (p_1^2 + p_2^2)$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^9(2\pi)^5 m^4} p_1^2 p_2 dp_1 d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$ $\int\limits_{\Omega_{p_1},\Omega_{p_2}} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^7(2\pi)^3 m^4} p_2 p_1^2\, dp_1$
		$d\sigma_{\text{кл.},\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^6}{2^4(2\pi)^5} \frac{p_2}{mp_1^3} dp_1 \frac{\sin^2\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^3} d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$	$d\sigma_{\text{кл.},\text{у.рел}} = \frac{M^2\varkappa^2e^2}{2^7(2\pi)^5} \frac{p_2}{mp_1} dp_1 \frac{\sin^2\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^2} d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$
	Гравитоном	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^9(2\pi)^5 m^8} p_1^2 p_2 dp_1 [\vec{k}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)]^2\, d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$ $\int\limits_{\Omega_{p_1},\Omega_{p_2}} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{3\cdot 2^4(2\pi)^3 m^6} p_1^2 p_2 dp_1 (p_1^2 + p_2^2)$	$d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^3}{2^7(2\pi)^5 m^6} p_1^2 p_2 dp_1 [\vec{k}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)]^2\, d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$ $\int\limits_{\Omega_{p_1},\Omega_{p_2}} d\sigma_{\text{кл}} = \frac{M^2\varkappa^3}{3\cdot 2^2(2\pi)^3 m^4} p_2 p_1^2 dp_1 (p_1^2 + p_2^2)$
		$d\sigma_{\text{кл.},\text{у.рел}} = \frac{Z^2e^4\varkappa}{2^4(2\pi)^5} \frac{p_2}{mp_1} dp_1 \frac{\sin^2\theta_1(2-\sin^2\theta_1)}{(1-\cos\theta_1)^2} d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$	$d\Omega_{\text{кл.},\text{ у. рел}} = \frac{M^2\varkappa^3}{2^7(2\pi)^5} \frac{p_2 p_1}{m} dp_1 \times$ $\times \frac{\sin^2\theta_1(17 - 8\cos\theta_1 - 7\cos^2\theta_1 + 2\cos^3\theta_1)}{(1-\cos\theta_1)^2} d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2}$

Наконец для изучения процессов рождения пар в данных полях воспользуемся соотношениями

$$[F^{\text{рожд}}(p_1, p_2, k)]^2 = 2[F^{\text{Ан}}(-p_1, -p_2, -k)]^2 \tag{20}$$

и

$$d\sigma^{\text{рожд}} = (2\pi)^2 [F^{\text{рожд}}(p_1, p_2, k)]^2 \varepsilon_2 p_2 p_1^2 d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2} dp_1 |_{k-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0}. \tag{21}$$

Здесь p_1 — импульс позитрона, p_2 — электрона. Предельные случаи выписаны в таблице 3: классический предел, затем случай образования ультрарелятивистского позитрона и нерелятивистского электрона. Левая верхняя клетка по-прежнему посвящена известному эффекту электродинамики.

Как и следовало ожидать, порядок сечений очень мал из-за наличия степеней $\varkappa$ в качестве множителей. Особенно это ощутимо в задачах с участием гравитонов во внешнем гравитационном поле (левый нижний угол таблиц). Однако для экспериментального обнаружения квантово-гравитационных эффектов можно использовать в качестве множителя квадрат массы центрального тела. Особенно наглядны в этом смысле верхние правые клетки, так как степень $\varkappa$ здесь ниже. В эффектах аннигиляции и рождения пары для классического приближения в квадрате модуля матричного элемента доминирует член, независящей от импульсов, что резко поднимает порядок сечений этих эффектов.

Так при рождении пары в классическом пределе

$$\frac{d\sigma_{M,\,\text{фотон}}}{d\sigma_{Ze,\,\text{фотон}}} = \frac{3}{4}\,\frac{M^2\varkappa^2 m^4}{Z^2 e^4 (p_1^2 + p_2^2)},$$

где первая буква возле $d\sigma$ обозначает источник поля, а вторая—бозон.

Отношение растет при уменьшении p_1 и p_2. Для квазара с гипотетической массой 10^{41} *г* при $p \sim 0{,}01$ *m* оно порядка единицы. Далее

$$\frac{d\sigma_{M,\,\text{гравитон}}}{d\sigma_{Ze,\,\text{фотон}}} = 10^{-68}\,\frac{M^2}{Z^2}.$$

Отношение достигает единицы при $M \sim 10^{34}$ *г*. В ультрарелятивистском случае все сечения рождения пар обращаются в бесконечность при рождении позитрона в направлении падающего излучения.

Выражения для тормозного излучения в нерелятивистском приближении довольно схожи. Правые клетки (таблица 2) переходят в левые при $\varkappa^2 m^2 M^2 \to 16 Z^2 e^4$. Оба результата в нижних клетках (гравитационное тормозное излучение) совпадают в этом пределе с подсчетом Р. Гупта для скалярных частиц [6].

Предельные случаи для аннигиляции относятся друг к другу аналогичным образом.

Благодарю Ю. С. Владимирова за большую помощь в работе и проф. Д. Д. Иваненко за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иваненко Д. Д. «Успехи физических наук», 32, № 3, 1947.
2. Владимиров Ю. С. ЖЭТФ, 45, 251, 1963.
3. Владимиров Ю. С. «Изв. вузов», физика, № 6, 82, 1964.
4. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
5. Gupta R. Proc. Phys. Soc., A65, 161, 1952.
6. Gupta R. Phys. Rev., 182, 1391, 1969.
7. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Введение в квантовую электродинамику.

Поступила в редакцию
11.6 1971 г.

Кафедра
теоретической физики