Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1972

УДК 53.02

В. П. КРИНДАЧ, Б. И. СПАССКИЙ

ОБОСНОВАНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА СИММЕТРИИ ПЬЕРА КЮРИ

§ 1. Анализ утверждений, составляющих принцип Кюри

В 1893—1895 гг. Пьером Кюри было сформулировано несколько утверждений общего характера, которые позже были названы совокупно принципом Кюри или принципом симметрии. Процитируем их.

1. «Когда некоторые причины производят некоторые действия, элементы симметрии причин должны обнаруживаться в этих произведенных действиях».

2. «Когда некоторые действия проявляют некоторую диссимметрию, то эта диссимметрия должна обнаруживаться и в причинах их порождающих».

3. «Положение, обратное этим двум несправедливо..., т. е. произведенные действия могут быть более симметричными, чем причины».

4. «...при наложении нескольких явлений... в одной и той же системе... элементами симметрии системы остаются только те, которые являются общими для каждого явления, взятого отдельно» ([1], стр. 102).

Задача этого параграфа — проанализировать эти утверждения: выяснить их точный смысл, сводимость друг к другу или взаимонезависимость, а также привести примеры, подтверждающие или, быть может, отрицающие их.

Выясним, какой смысл вкладывал П. Кюри в понятие причины.

Легко убедиться, что слово «причина» в утверждении 1 не должно пониматься в смысле «частичной причины», т. е. одного из многих условий, совокупность которых однозначно определяет следствие, так как существует много примеров, когда следствие не имеет элементов симметрии, присущих частичной причине[1]. Кроме того, в примерах, которые приводит сам Кюри, фигурируют не частичные, а достаточные причины (такой один фактор, являющийся, быть может, набором нескольких частичных причин, задание которого с достаточностью опре-

[1] Например, начальная скорость материальной точки $\vec{v}_0$ и ускорения тяжести $\vec{g}$, будучи частичными причинами траектории, имеют порознь оси симметрии ∞_{v_0} и ∞_g у траектории отсутствующие.

деляет следствие) [2]. Дополнительно к примерам Кюри имеется множество случаев (некоторые из них приводятся ниже), в которых утверждение 1 справедливо, если в нем под «причиной» понимать достаточную причину. Учитывая это, переформулируем 1 так.

Элементы симметрии достаточной причины должны обнаруживаться у ее следствия (1а).

Проиллюстрируем это утверждение примером, которого нет у Кюри. Изолированная система двух идентичных сферически симметричных покоящихся тел имеет симметрию $m \cdot \infty : m$. Поскольку силы взаимодействия достаточным образом определяются самими телами, то, согласно 1а, они должны также иметь симметрию $m \cdot \infty : m$, что возможно лишь, если эти силы равны по величине и противоположно направлены. Итак, из утверждения 1а вытекает для простейшего случая изолированных идентичных покоящихся сфер третье начало механики.

Переформулируем 2, учитывая, что «причина» означает достаточную причину:

Элементы диссимметрии следствия должны быть также элементами диссимметрии достаточной причины (2а).

Покажем, что утверждения 1а и 2а эквивалентны. Действительно, из 1а следует, что элементы симметрии, которых нет у следствия, отсутствуют и у достаточной причины (так как будь они у достаточной причины, они должны были бы быть, согласно 1а, и у следствия); но это и означает, что элементы диссимметрии следствия являются элементами диссимметрии достаточной причины, что как раз составляет утверждение 2а. Итак, из 1а следует 2а. Обратно, из 2а вытекает, что элементы симметрии достаточной причины являются элементами симметрии следствия (так как, если бы следствие не имело этих элементов симметрии, то, согласно 2а, их не могла бы иметь и достаточная причина); но это и составляет утверждение 1а. Итак, из 2а следует 1а. Следовательно, 1а и 2а эквивалентны.

В силу эквивалентности 1а и 2а предпочтение одной из этих формулировок определяется только удобством. Поскольку элементы симметрии системы составляют группу, а элементы диссимметрии нет, то ради применимости аппарата теории групп выгодней сохранить 1а.

Утверждение 3 не является категорическим, но трактует лишь о возможности. Для его обоснования поэтому достаточно привести один пример.

Уже упоминавшийся третий закон Ньютона требует, чтобы сколь угодно асимметричная система двух тел имела силы взаимодействия с группой симметрии $m \cdot \infty : m$, т. е. здесь асимметричная достаточная причина порождает симметричное следствие.

Утверждение 4 подтверждается следующими примерами.

Пример П. Кюри ([1], стр. 108). «Предположим, что мы наложили бы друг на друга в одном теле электрическое поле и магнитное поле с тем же направлением; тогда сохранится только ось изотропии».

Пример А. В. Шубникова ([2], стр. 599). Цилиндр, вращающийся в потоке воды с осью вращения, перпендикулярной направлению потока, есть система, представляющая суперпозицию двух подсистем —

---

[2] А. В. Шубников, отмечая в [2] чрезмерный лаконизм формулировок Кюри, так комментирует неопределенность его выражений: «Трудность понимания этих принципов заключается в неясности, что в конкретных случаях следует понимать под «причиной» и «следствием» (стр. 600). Далее А. В. Шубников предлагает интерпретацию слова «причина», в сущности совпадающую с употребляемым нами понятием достаточной причины: «Условимся за «причину» принимать все исходные данные...».

самого вращающегося цилиндра с симметрией $\infty : m$ и потока воды с симметрией $\infty \cdot m$. Общий для них элемент симметрии — плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, остается, согласно 4, у системы в целом. А. В. Шубников отмечает здесь полную аналогию с эффектом Холла: прямой ток $(\infty \cdot m)$ и нормальное ему магнитное поле $(\infty \cdot m)$ дают при суперпозиции единственную плоскость симметрии, перпендикулярную к $\vec{H}$.

Однако существуют и примеры, противоречащие утверждению 4. Первая группа таких примеров связана с ошибочностью употребления слова «только» в формулировке Кюри. Существует много случаев наложения нескольких явлений, когда результирующая система имеет кроме элементов симметрии, общих всем складывающимся явлениям, еще дополнительные элементы симметрии, отсутствующие у некоторых или даже у всех слагаемых. Например, совокупность сил, расположенных в плоскости m, складывается в равнодействующую $\vec{F}$, которая помимо плоскости симметрии m, общей слагаемым силам, имеет еще ось симметрии ∞_F, отсутствующую у каждой из слагаемых сил. Но даже если исключить из утверждения 4 слово «только», останутся все-таки возможности его нарушения.

Действительно, взаимодействие между подсистемами может служить причиной обнаружения некоторых скрытых диссимметрий: ничто не гарантирует, что достаточно сильное взаимодействие не может реализовать в каждой из складывающихся подсистем некоторые дотоле «замороженные» степени свободы, «размораживание» которых способно дополнительно диссимметризовать подсистему. С учетом такой индуцированной диссимметризации действительные симметрии подсистем в состоянии физической суперпозиции могут быть ниже их симметрий вне взаимодействия. Поэтому их пересечение может быть вопреки утверждению 4, беднее элементами симметрии, чем пересечение групп подсистем вне взаимодействия [3].

Итак из четырех рассмотренных утверждений утверждение 1а проиллюстрировано, но в общем виде не обосновано, утверждение 2а эквивалентно утверждению 1а, утверждение 3, фиксирующее не необходимый, но лишь возможный вывод, не является теоретически ценным, утверждение 4 не гарантировано от нарушений.

Дальнейшая задача заключается в обосновании утверждения 1а и такой переформулировки утверждения 4, при которой оно было бы заведомо справедливым и допускало строгое обоснование.

В дальнейшем мы уже не будем обращаться к формулировкам Кюри, а введем новые удобные понятия, долженствующие выразить утверждения, аналогичные 1а и 4 в более четкой, общей чем у Кюри, и доказуемой форме.

---

[3] Отметим как следствие возможности этой диссимметризации, что кристаллографический закон суперпозиции групп симметрии [3, 4, 5, 10, 12] $C'_K \cap G'_B = G_K \cap G_B$ (G_K, G_B — группы невозмущенного кристалла и поля; G'_K, G'_B — группы кристалла и поля измененных взаимодействием; символ $\cap$ означает пересечение групп), представляющий применительно к кристаллу, строгую формулировку утверждения 4, следует считать частным случаем соотношения $G'_K \cap G'_B \subseteq G_K \cap G_B$, учитывающего возможность взаимной диссимметризации. Отметим также, что исключению слова «только» из утверждения 4 соответствует соотношение $G'_K \cap G'_B \supset G_K \cap G_B$ (см. [10] стр. 99), так что закон суперпозиции групп обобщается до формулы $G'_K \cap G'_B \overset{\subseteq}{\supsetneq} G_K \cap G_B$.

§ 2. Построение и обоснование принципа симметрии

Пусть A и B — объекты произвольной природы: системы, состояния систем, физические или математические величины и т. д. Будем говорить, что объект A является детерминантой объекта B (или, просто, что A детерминирует B), если объект A однозначно характеризует объект B, т. е. если достаточно знать A, чтобы полностью определить все свойства B[4]. Например, пара точек пространства является детерминантой прямой, заключающей их. Если по состоянию Λ_{t_0} системы в момент t_0 можно определить, каким было предыдущее состояние $\Lambda_t (t<t_0)$, то Λ_{t_0} детерминирует Λ_t. Понятие детерминанты обобщает понятие достаточной причины: всякая достаточная причина является, очевидно, детерминантой, но понятие детерминанты охватывает и такие отношения двух объектов, которые не укладываются в понятие причинности — так, две вышеприведенные детерминанты не могут быть названы достаточными причинами.

Введение понятия детерминанты оправдывается следующей теоремой.

Теорема 1. Если объект A является детерминантой объекта B и имеет элемент симметрии g, то объект B также имеет элемент симметрии g.

Доказательство. Пусть χ — произвольная координатная система, а χ_g — другая координатная система, образуемая из χ применением к ней операции g. По определению симметрии объект A одинаков в координатных системах χ и χ_g, а поскольку объект A исчерпывающим образом характеризует объект B, то в χ и χ_g одинаков и объект B, т. е. B имеет элемент симметрии g, что и требовалось доказать.

В силу произвольности операции g доказанная теорема имеет такую эквивалентную формулировку. Если объект A является детерминантой объекта B и имеет группу симметрии G_A, то G_A является по крайней мере подгруппой группы симметрии G_B объекта B: $G_A \subseteq G_B$.

Теорема 1 по сравнению с аналогичным ей утверждением 1а имеет преимущество в общности (так как справедлива для любой детерминации, а не только для причинности) и в обоснованности[5].

Чтобы построить аналог утверждения Кюри 4, мы будем применять к объектам операцию мысленного расчленения объекта на части, т. е. рассматривать данный объект не как одно целое, а как совокупность составляющих его частей. Например, геометрическое тело можно интерпретировать как совокупность линий, точек или поверхностей; сложное поле можно мысленно расчленить на $\vec{g}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ и тому подобные компоненты, несмотря на то, что эти «части» расположены в одной и той же пространственной области. Понятие мысленного расчленения объекта на части вводится как усовершенствованный аналог реальной физической суперпозиции ряда явлений, чреватой, как выяснилось, возможностью их взаимной диссимметризации. От мысленного разбие-

---

[4] Всюду в дальнейшем термин «детерминация» должен пониматься только в указанном смысле, не ассоциируясь с каким-либо из традиционных толкований детерминации.

[5] Для иллюстрации полезности теоремы 1 отметим, что фундаментальный в кристаллофизике закон Ноймана, утверждающий, что всякое преобразование симметрии кристалла есть преобразование симметрии либо его физического свойства $G_k \subseteq G_a$, где G_k и G_a — группы симметрии соответственно кристалла и физического свойства (см. [3, 4, 5, 12]), непосредственно вытекает из теоремы 1: поскольку кристалл, конечно, является детерминандой любого своего свойства, то по теореме 1 $G_k \subseteq G_a$, что и составляет закон Ноймана.

ния диссимметризирующие эффекты возникнуть не могут, что и позволяет строго доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если объект A мысленно расчленен на части a_1, a_2, ..., a_n, имеющие соответственно группы симметрии G_1, G_2, ..., G_n, то пересечение этих групп $G^{\times}=G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$ входит в группу симметрии G_A объекта $A: G^{\times} \subseteq G_A$.

Доказательство. Любая операция g из $G^{\times}$ оставляет без изменения каждую из частей a_1, a_2, ..., a_n, следовательно, оставляет без изменения объект A, как совокупность частей a_1, a_2, ..., a_n; значит g — операция симметрии объекта A.

В силу произвольности g вся группа $G^{\times}$ принадлежит группе симметрии объекта A, $G^{\times} \subseteq G_A$, что и требовалось доказать. Отметим, что в тех случаях, когда диссимметризирующие взаимодействия в физической суперпозиции подсистем заведомо возникнуть не могут, теорема 2 эквивалентна утверждению Кюри 4 (без слова «только»). В общем же случае теорема 2 справедлива всегда, а утверждение 4 — не всегда.

Доказанные теоремы 1 и 2, представляющие обобщенные и усовершенствованные аналоги утверждений Кюри, вытекают из содержания фигурирующих в них понятий (теорема 1 — из определения понятий симметрии и детерминанты, теорема 2 — из определения понятий симметрии и операции мысленного расчленения), т. е. являются действительно теоремами, а не опытными законами. Опытным фактом является лишь наличие или отсутствие детерминации в той или иной конкретной системе.

Под принципом симметрии в дальнейшем мы будем подразумевать совокупность этих двух теорем.

§ 3. Применение принципа симметрии к вопросу об изменении симметрии замкнутой системы со временем

Применим теорему 1 принципа симметрии к случаю, когда детерминирующим и детерминируемым объектами являются два разновременных состояния A_{t_1} и A_{t_2} замкнутой системы. Между состояниями A_{t_1} и A_{t_2} ($t_2 > t_1$) могут быть отношения детерминации четырех типов:

A_{t_1} детерминирует A_{t_2}, но A_{t_2} не детерминирует A_{t_1} или в символической форме $A_{t_1} \rightarrow A_{t_2}$, но $A_{t_2} \not\rightarrow A_{t_1}$, т. е., зная состояние A_{t_1}, можно предсказать состояние A_{t_2}, но знания A_{t_2} недостаточно, чтобы восстановить, каким было A_{t_1}. Обозначим для краткости этот вид детерминации символом п $\rightarrow$ б («прошлое состояние детерминирует будущее»).

$A_{t_2} \rightarrow A_{t_1}$, но $A_{t_1} \not\rightarrow A_{t_2}$, т. е., зная A_{t_2}, можно восстановить, каким было A_{t_1}, но знания A_{t_1} недостаточно, чтобы предугадать A_{t_2}.

$A_{t_1} \rightarrow A_{t_2}$ и $A_{t_2} \rightarrow A_{t_1}$

Обозначение: п $\rightarrow$ б, б $\rightarrow$ п или п $\rightleftarrows$ б.

$A_{t_1} \not\rightarrow A_{t_2}$ и $A_{t_2} \not\rightarrow A_{t_1}$ или п $\overset{\not\rightarrow}{\underset{\not\leftarrow}{}}$ б.

Этим четырем типам детерминации соответствуют, согласно теореме I четыре типа изменения симметрии системы со временем:

При п $\rightarrow$ б детерминации все элементы симметрии состояния A_{t_1} имеются у A_{t_2}, но все элементы симметрии A_{t_2} не обязаны быть у A_{t_1}, т. е.

элементы симметрии A_{t_1} сохраняются при эволюции системы к A_{t_2}, и на пути от A_{t_1} к A_{t_2} могут добавляться новые элементы симметрии, отсутствовавшие у $A_{t_1}: G_п \subseteq G_б$.

При б→п детерминации, наоборот, все элементы симметрии состояния A_{t_2} имеются у A_{t_1}, но все элементы симметрии A_{t_1} не обязаны быть у A_{t_2}, т. е. на пути от A_{t_1} к A_{t_2} новые элементы симметрии не добавляются и может происходить потеря элементов симметрии, бывших у A_{t_1}: $G_п \supseteq G_б$.

При п⇄б детерминации все элементы симметрии состояния A_{t_1} имеются у A_{t_2} и все элементы симметрии A_{t_2} имеются у A_{t_1}. Это значит, что при такой детерминации выполняется закон сохранения группы симметрии системы[6]: $G_п = G_б$.

Если $A_{t_1} \nrightarrow A_{t_2}$ и $A_{t_2} \rightarrow A_{t_1}$, то изменения симметрии не регулируются принципом симметрии и могут быть произвольными, в частности $G_п \underset{\not\supset}{\not\subset} G_б$.

Проиллюстрируем теперь выводы примерами. Для этого классифицируем ряд физических процессов по четырем типам детерминации и приведем простые системы, представляющие каждый тип.

Покажем, что детерминация п→б типа имеется во многих процессах релаксации: если существует однозначное уравнение эволюции из произвольного состояния A к равновесному состоянию R (при $t \rightarrow \infty$), то A является детерминантой каждого из последующего состояний, включая R. Конечное состояние R не является детерминантой ни одного из прошлых состояний, так как по R невозможно восстановить путь релаксации. Итак, произвольное состояние $A \rightarrow R$, но $R \nrightarrow A$, т. е. для A и R имеется п→б детерминация.

Значит группа симметрии любого состояния A является подгруппой группы симметрии состояния R, и R может иметь дополнительные элементы симметрии, отсутствующие у других состояний. Таким образом, равновесное состояние R обладает наибольшей для данной системы симметрией.

Приведем простые примеры: а) затухающей шарообразный маятник имеет в равновесном состоянии наибольшую симметрию $\infty \cdot m$; б) тающая снежинка, превращаясь в каплю, достигает наибольшей симметрии $\infty/\infty \cdot m$; в) в процессах плавления кристалла, испарения капель жидкости, выравнивания температуры однородного тела, затухания волн в однородной среде, выравнивания плотности газа, размагничивания — конечное, равновесное, состояние имеет наибольшую симметрию.

Б→п-детерминация может, по определению, существовать только в актах непредсказуемого поведения. Актами непредсказуемого поведения являются, например, кристаллизация однородной пересыщенной жидкости и конденсация однородного пара (так как вследствие равноценности всех точек исходной фазы невозможно предугадать координаты зародышей новой фазы), выпадение осадка из однородного пересыщенного раствора, самонамагничивание кубического монокристалла железа, охлажденного до температуры Кюри (так как вследствие равноценности трех взаимно ортогональных осей намагничивания и двух противоположных направлений на каждой оси направление возникающего магнитного момента непредсказуемо), самополяризация охлажденного до температуры Кюри кубического монокристалла сегнетоэлектрика, излучение света симметричным атомом (так как вследствие равноценности многих направлений действительное направление излучения непредсказуемо).

В приведенных примерах, зная состояние сразу после непредсказуемого акта, можно определить, каким было исходное метастабильное состояние, т. е. имеется б→п-детерминация. В согласии с теоремой 1, здесь происходит потеря элементов симметрии [6].

П⇄б-детерминация имеется в процессах, которые описываются уравнениями, позволяющими определить по предшествующему состоянию последующие, и наоборот; уравнения Ньютона, Максвелла, Шредингера обладают этим свойством, так что в механических электродинамических, квантовомеханических процессах имеется п⇄б-детерминация, следовательно, выполняется закон сохранения группы симметрии.

Приведем примеры: а) свободный гироскоп сохраняет симметрию $\infty \cdot m$; б) плоская (сферическая) волна, идущая в однородной изотропной среде, сохраняет симметрию, т. е. остается плоской (сферической), в) монохроматический поляризованный световой луч, распространяющийся в однородной среде, сохраняет переносную ось симметрии с шагом λ и плоскость симметрии (плоскость поляризации); рассматриваемый как геометрический луч, он сохраняет также группу симметрии $\infty \cdot m$ (так что закон прямолинейности светового луча выводится из принципа симметрии).

Отсутствие и п→б, и б→п-детерминации, т. е. п↛б-детерминация имеется, например, при переходе атома с метастабильного уровня на один из многих возможных нижних уровней, если на этот реализовавшийся нижний уровень атом мог спуститься и со многих других верхних уровней. В таких переходах изменения симметрии произвольны.

Авторы выражают благодарность проф. В. А. Копцику за ценные советы и дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кюри П. Избранные труды. М., 1966.
2. Шубников А. В. О работах Пьера Кюри в области симметрии. «Успехи физических наук», 59, вып. 4, 1956.
3. Копцик В. А. В кн. У. Вустер. Практическое руководство по кристаллофизике. М., 1958.
4. Копцик В. А. «Кристаллография», 2, вып. 1, 1957.
5. Копцик В. А. «Кристаллография», 5, вып. 6, 1960.
6. Биркгофф Г. Гидродинамика. М., 1954, § 14, 15.
7. Rouse H. Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers. NY — London, 1938.
8. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М., 1951.
9. Birkhoff G. D. The Principle of Sufficient Reason. Collected mathematical papers, v. III, N. Y., 1950.
10. Копцик В. А. Шубниковские группы. М., 1966.
11. Freudenthal H. Les fatits et gests de L'ane de Buridan. XII congres International d'Histore des Science. Textes des rapports.
12. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М., 1972.

Поступила в редакцию
8.2 1971 г.

Кафедра
истории физики

[6] Вследствие того, что в гидродинамике существует (в немалой степени благодаря Г. Биркгоффу) интерес к такого рода процессам, в ней можно найти особенно яркие примеры диссимметризации (включаемые в разряд называемых гидродинамических парадоксов ([6, 7], стр. 246 и [8] стр. 231). Вот один из них: воздушный пузырек, поднимающийся в воде под действием архимедовой силы движется при $R>50$ по вертикальной спирали (!), хотя вся физическая ситуация обладает, очевидно, осевой симметрией $\infty \cdot m$.

Сам Биркгофф [6] истолковывает эти диссимметризации так: «...хотя симметричные причины должны вызывать симметричные действия, почти симметричные причины не необходимо вызывают почти симметричные действия... Эта возможность и является действительной причиной парадоксов симметрии». Здесь по существу упоминаются малые причины (малые отклонения от симметрии), развивающиеся в большие следствия (большие отклонения от симметрии), что свидетельствует о существенно случайном характере процессов. Эта же связь между индетерминизмом процесса и нарушениями симметрии в явном виде дается теоремой 1.