Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1972

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ДИАДНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

В настоящей заметке тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ многообразия событий V^4 записан в шестимерном бивекторном пространстве с помощью диадных проекций, т. е. проекций на двухмерные распределения, на которые расщепляется касательное расслоение TV^4:

$$TV^4 = V_2^4 + V_2^4 = D + \Delta. \tag{1}$$

Это представление тензора кривизны оказывается удобным для описания волновых гравитационных полей (типы T_2 и T_3 по Петрову), тогда как для описания полей алгебраически общего типа T_1 удобнее использовать расщепление касательного многообразия событий на время и пространство:

$$TV^4 = V_1^4 + V_3^4 = \Theta + \Sigma. \tag{2}$$

Впервые тензор кривизны пространства — времени (в вакууме) разложил на два тензора трехмерного пространства, видимо, Бель [2]. См. также работы [3—12] (работы [4—9] размещены в хронологическом порядке). Разложения тензора кривизны на проекции по каждому индексу представляют собой, очевидно, формулы Гаусса—Кодацци—Риччи. Смысл привлечения их для расщепления (2) заключается в том, что тогда блоки матрицы тензора кривизны [1]

$$R = \begin{Vmatrix} M & N \\ N & -M \end{Vmatrix}$$

оказываются тензорами трехмерного физического пространства, а это открывает путь для физической интерпретации классификации Петрова [6—9].

Если u^a — поле единичного временноподобного вектора, задающего время Θ и пространство Σ с метриками (сигнатура $+ - - -$))

$$a_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu, \quad b_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

то четырехмерное представление тензоров M и N имеет вид

$$M_{\mu\nu} = P_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta, \quad N_{\mu\nu} = {}^*R_{\mu\alpha\nu\beta} u^\alpha u^\beta,$$

$${}^*R_{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha\rho\sigma} R^{\rho\sigma}_{\cdot\cdot\nu\beta}.$$

Если же a и b суть метрики неизотропных распределений D и Δ, то для диадных компонентов тензора Римана имеем:

$$a^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv a^\mu_\alpha a^\nu_\beta a^\rho_\gamma a^\sigma_\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = A_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\, b^{\rho\sigma}_{\gamma\delta}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$a^{\mu\rho}_{\alpha\gamma}\, b^{\nu\sigma}_{\beta\delta}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = N_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$a^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}\, b^{\sigma}_{\delta}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$b^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

В орторепере, специализированном для расщепления (1), получаем:

$$R = \begin{Vmatrix} A & \mathrm{III} & B & \mathrm{III} \\ \mathrm{III} & N & \mathrm{III} & N \\ B & \mathrm{III} & C & \mathrm{III} \\ \mathrm{III} & N & \mathrm{III} & N \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} A & \mathrm{III} \\ \mathrm{III} & N \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} B & \mathrm{III} \\ \mathrm{III} & N \end{Vmatrix}.$$

Для канонической тетрады имеем [1]:

$$M_{\mathrm{I}} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 \end{Vmatrix}, \quad N_{\mathrm{I}} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_3 \end{Vmatrix}.$$

$$M_N = \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{Vmatrix}, \quad N_N = \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{Vmatrix}.$$

$$M_{\mathrm{III}} = \begin{Vmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}, \quad N_{\mathrm{III}} = \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, отличные от нуля компоненты, рассеянные по матрицам M, N для волновых полей типа N III, по Петрову (в обозначениях Пенроуза) для расщепления (1) собираются в соответствующие канонические диадные компоненты. Другими словами, равенства $\mathrm{III}_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$, $N_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ характеризуют тип III, а $\mathrm{III} = 0$, $N \neq 0$ — тип N. Можно предположить в связи с этим, что с гравитационными волнами естественно связывать расщепление четырехмерного многообразия событий не на время и пространство, а на двухмерные подпространства. Запрет такого представления многообразия событий означал бы движение от идей Минковского не вперед, а назад: уж если мы делим то, что было у него неделимым, то делить следует в разных случаях (вещество, волны) по-разному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
2. Bel L., Acad C. R. Sci, **247**, 2096, 1958.
3. Misra R. M. Amer. J. Phys., **35**, 394, 1967.
4. Захаров В. Д. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966, стр. 126.
5. Станюкович К. П., Соколик Г. А. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 2. М., Атомиздат, 1969, стр. 124.
6. Полищук Р. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 3, 352, 1970.
7. Григорьева Л. Б. ДАН СССР, **192**, 1251, 1970.
8. Полищук Р. Ф. «Некоторые применения систем отсчета в общей теории относительности», Препринт ВНИИОФИ, № 70—5. М., 1970, стр. 1—13.
9. Полищук Р. Ф. ДАН СССР. **197**, № 1, 8, 1971; **194**, 62, 1970.
10. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956; **124**, № 5, 1959.
11. Schouten J. A. D. van Dantzig, Zs. f. Phys., **78**, 639, 1932.
12. Cattaneo C. Nuovo Cimento, **10**, 318, 1958.
13. Зельманов А. Л. «Труды 6-го совещания по вопросам космогонии». М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 153.

14. Schouten J. A. an Kampen E. R. Math. Ann, 103, 752, 1930.
15. Вагнер В. В сб. 8-ой международный конкурс на соискание премии им. Е. И. Лобачевского, 1937, Казань, 1940.

Поступила в редакцию
17.2 1971 г.

ГАИШ

УДК 533.95 : 538.4

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ

О ПОСТРОЕНИИ ГИДРОДИНАМИКИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ НА БАЗЕ КОВАРИАНТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] рассмотрен переход от нерелятивистских функций распределения к гидродинамике для произвольного вида взаимодействий между частицами. Показано, что при этом возникает бесконечная цепочка законов сохранения для моментов относительно функций распределения, не представляющая собой замкнутого математического аппарата гидродинамики.

Рассмотрим особенности, присущие аналогичной задаче для системы взаимодействующих частиц с одинаковыми массами m и зарядами e [1], описываемой уравнениями

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} + F^\alpha_\beta u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0, \tag{1}$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\varkappa m c^2 \int u_\alpha u_\beta f(x, u)\, d\Omega - \varkappa T^{(e)}_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi e \int u^\beta f(x, u)\, d\Omega,$$

$$\nabla \{\alpha F_{\beta\gamma}\} = 0 \tag{3}$$

при дополнительном условии

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Здесь $F_{\alpha\beta}$ и $T^{(e)}_{\alpha\beta}$ — тензор напряженности и тензор энергии-импульса электромагнитного поля, инвариантная функция распределения $f(x, u)$ задает поле скаляра в пространстве опорных элементов:

$$d\Omega = c^3 (u^0)^4\, d\left(\frac{u^1}{u_0}\right) d\left(\frac{u^2}{u^0}\right) d\left(\frac{u^3}{u^0}\right).$$

Мы рассматриваем таким образом компоненты 4-скорости в качестве «проективных» [2] координат в касательном пространстве.

В базисном псевдоримановом пространстве можно определить моменты относительно функции распределения

$$\int (u_0)^{-r} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_r} f(x, u)\, d\Omega.$$

Они не представляют собой тензоров. Тензорные свойства имеют величины

$$M^{\alpha \perp \alpha_2 \ldots \alpha_r} = \int u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_r} f(x, u)\, d\Omega. \tag{4}$$

Следовательно, ковариантное описание рассматриваемой системы релятивистских частиц в пространстве координат и времени возможно лишь с помощью тензоров (4).

Найдем уравнения для $M^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}$. Для этого умножим на $u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} \ldots u^{\alpha_r}$ уравнение, полученное из (1) после подстановки (3), и проинтегрируем по скоростям. После громоздких преобразований получим цепочку уравнений