

14. Schouten J. A. an Kampen E. R. Math. Ann, **103**, 752, 1930.
 15. Вагнер В. В сб. 8-ой международный конкурс на соискание премии им. Е. И. Лобачевского, 1937, Казань, 1940.

Поступила в редакцию
 17.2.1971 г.

ГАИШ

УДК 533.95 : 538.4

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ

О ПОСТРОЕНИИ ГИДРОДИНАМИКИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ НА БАЗЕ КОВАРИАНТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] рассмотрен переход от нерелятивистских функций распределения к гидродинамике для произвольного вида взаимодействий между частицами. Показано, что при этом возникает бесконечная цепочка законов сохранения для моментов относительно функций распределения, не представляющая собой замкнутого математического аппарата гидродинамики.

Рассмотрим особенности, присущие аналогичной задаче для системы взаимодействующих частиц с одинаковыми массами m и зарядами e [1], описываемой уравнениями

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} + F_{\beta}^\alpha u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0, \quad (1)$$

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa m c^2 \int u_\alpha u_\beta f(x, u) d\Omega - x T_{\alpha\beta}^{(e)}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} &= 4\pi e \int u^\beta f(x, u) d\Omega, \\ \nabla \{ \alpha F_{\beta\gamma} \} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

при дополнительном условии

$$u^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Здесь $F_{\alpha\beta}$ и $T_{\alpha\beta}^{(e)}$ — тензор напряженности и тензор энергии-импульса электромагнитного поля, инвариантная функция распределения $f(x, u)$ задает поле скаляра в пространстве опорных элементов:

$$d\Omega = c^3 (u^0)^4 d\left(\frac{u^1}{u^0}\right) d\left(\frac{u^2}{u^0}\right) d\left(\frac{u^3}{u^0}\right).$$

Мы рассматриваем таким образом компоненты 4-скорости в качестве «проективных» [2] координат в касательном пространстве.

В базисном псевдоримановом пространстве можно определить моменты относительно функции распределения

$$\int (u_0)^{-r} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_r} f(x, u) d\Omega.$$

Они не представляют собой тензоров. Тензорные свойства имеют величины

$$M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = \int u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_r} f(x, u) d\Omega. \quad (4)$$

Следовательно, ковариантное описание рассматриваемой системы релятивистских частиц в пространстве координат и времени возможно лишь с помощью тензоров (4).

Найдем уравнения для $M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$. Для этого умножим на $u^{\alpha_2} u^{\alpha_3} \dots u^{\alpha_r}$ уравнение, полученное из (1) после подстановки (3), и проинтегрируем по скоростям. После громоздких преобразований получим цепочку уравнений

$$\nabla_{\alpha_1} M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = \frac{e}{mc^2} (F_{\alpha_1}^{\alpha_2} M^{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_r} + \dots + F_{\alpha_1}^{\alpha_r} M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1}}), \quad (5)$$

которые для незаряженных частиц сводятся к тензорным законам сохранения

$$\nabla_{\alpha_1} M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = 0.$$

В каждом таком уравнении зацеплены моменты всех порядков. С помощью подобных вычислений можно убедиться также, что уравнения для моментов, как и в классической теории, связывают конечное число моментов. Однако ни одно из уравнений не выражает какой-либо закон сохранения.

Выясним, все ли законы изменения и сохранения тензоров являются независимыми. Сворачивая пару соседних уравнений цепочки (9) с метрическим тензором, получаем два уравнения для тензора меньшего на две единицы ранга. После $\frac{r}{2} - 1$

сверток при r четном и $\frac{r-1}{2}$ при r нечетном приходим к несводимым друг к другу уравнениям:

$$\nabla_{\alpha} M^{\alpha} = 0 \quad \nabla_{\alpha} M^{\alpha\beta} = \frac{e}{mc^2} F_{\alpha}^{\beta} M^{\alpha}.$$

Для частиц с гравитационным взаимодействием совокупность всех уравнений разбивается на две независимые цепочки с четным и нечетным r . Все это позволяет выбрать для построения релятивистской теории непрерывной среды любые два уравнения (5) с тензорами ранга r и $r+1$ в левой части, дополнив их функциональными связями, необходимыми для получения замкнутого математического аппарата.

Покажем, что в общей теории относительности уравнения поля налагают определенные дифференциальные связи на тензоры M^{α} и $M^{\alpha\beta}$. Для этого рассмотрим альтернированную вторую производную вектора M^{α}

$$\nabla_{[\sigma} \nabla_{\alpha]} M^{\rho} = -R_{\sigma\alpha}{}^{\gamma}{}_{\rho} M^{\gamma}.$$

Суммируя по индексам σ, ρ вследствие уравнений поля (2) и закона сохранения (5), найдем

$$\nabla_{\sigma} \nabla_{\alpha} M^{\sigma} = \kappa mc^2 \left(M_{\alpha\beta} M^{\beta} - \frac{1}{2} M M_{\alpha} + \frac{1}{mc^2} T_{\alpha\beta}^{(e)} M^{\beta} \right),$$

M — инвариант тензора $M_{\alpha\beta}$.

Подобные вычисления для вторых производных тензора $M^{\alpha\beta}$ приводят к результату.

$$\nabla_{\alpha} \nabla_{[\gamma} M_{\sigma]}^{\alpha} = \kappa T_{\rho[\gamma}^{(e)} M_{\sigma]}^{\rho} + \frac{e}{mc^2} \nabla_{[\gamma} F_{\sigma]\rho} M^{\rho}.$$

Полученные десять уравнений гидродинамики взаимодействующих частиц в общем случае не образуют замкнутой системы уравнений.

Оставляя в стороне феноменологический метод проектирования тензоров на поле единичного вектора [3], выделим в заключение в тензорах $M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ слагаемые, содержащие $\langle u^{\alpha} \rangle$, $u^{\alpha} - \langle u^{\alpha} \rangle$, с помощью ковариантной процедуры усреднения

$$\rho \langle \dots \rangle = \int (\dots) f(x, u) d\Omega, \quad \rho = \int f(x, u) d\Omega.$$

и проведем сравнение с феноменологической гидродинамикой. Получаем разложение

$$\begin{aligned} M^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = & \rho \left(1 + \frac{P}{\rho mc^2} \right)^{\frac{r}{2}} \tau^{\alpha_1} \tau^{\alpha_2} \dots \tau^{\alpha_r} + \frac{1}{mc^2} \left(1 + \frac{P}{\rho mc^2} \right)^{\frac{r-2}{2}} \times \\ & \times \tau^{\alpha_1} \dots \tau^{\alpha_{r-2}} P^{\alpha_{r-1} \alpha_r} + \dots + \frac{1}{mc^{r-1}} \left(1 + \frac{P}{\rho mc^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tau^{\alpha_1} P^{\alpha_2 \dots \alpha_r} + \\ & + \frac{1}{mc^r} P^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$P^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = \rho m c^r \langle (u^{\alpha_1} - \langle u^{\alpha_1} \rangle) (u^{\alpha_2} - \langle u^{\alpha_2} \rangle) \dots (u^{\alpha_r} - \langle u^{\alpha_r} \rangle) \rangle$$

$$P = g_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta}, \quad \tau^\alpha(x) = \langle u^\alpha \rangle / \langle u^\sigma \rangle \langle u_\sigma \rangle.$$

В частности, при $r=1$, $r=2$ имеем

$$M^\alpha(x) = \rho(x) \sqrt{1 + \frac{P}{\rho m c^2} \tau^\alpha(x)}, \quad (7)$$

$$M^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{m c^2} T^{\alpha\beta} = \rho \left(1 + \frac{P}{\rho m c^2} \right) \tau^\alpha \tau^\beta + \frac{1}{m c^2} P^{\alpha\beta}. \quad (8)$$

В феноменологической теории жидкости

$$M_f^\alpha = n_0(x) \tau^\alpha(x), \quad (9)$$

$$M_f^{\alpha\beta} = (\epsilon + P_f) \tau^\alpha \tau^\beta + P_f g^{\alpha\beta}. \quad (10)$$

В частном случае (7) и (8) должны совпадать с (9) и (10). Отсюда для внутренней энергии, отнесенной к одной частице, получаем выражение

$$\frac{\epsilon}{n_0} = P_f \frac{1}{n_0} + \sqrt{4 P_f^2 \frac{1}{n_0^2} + m^2 c^4}. \quad (11)$$

При $\frac{P}{n_0 m c^2} \gg 1$ «уравнение состояния» (11) совпадает в пределе с известной формулой для ультрарелятивистского газа.

В заключение следует отметить, что при переходе к семимерной функции распределения моменты теряют тензорные свойства, а уравнения для них не приводят к законам сохранения. Для построения релятивистской теории непрерывной среды можно выбрать любые два уравнения для тензоров ранга r и $r+1$ из счетного бесконечного множества «законов сохранения». Уравнения для потока и тензора частиц вместе с уравнениями поля приводят к системе десяти уравнений второго порядка, которые могут быть взяты в качестве основных для гидродинамического описания взаимодействующих частиц. Тензор частиц и вектор потока совпадают с феноменологическими лишь при вполне определенном уравнении состояния.

Выражаю благодарность проф. А. А. Власову за предоставление темы и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., «Наука», 1966.
2. Pauli W. Ann. d Physik, 18, 305, 1933.
3. Vignon B. Ann. Inst. Poincare, 1, 31, 1969.

Поступила в редакцию
11.11 1970 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.293.537.324

В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ, М. А. ЭЛЬ-ШАРНУБИ

К ТЕОРИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ГОРЯЧИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Задача о поглощении света горячими носителями заряда рассматривалась рядом авторов (обзор соответствующих работ можно найти в книге [1]). В настоящей статье изучается случай, когда доминирует рассеяние энергии и импульса на неполярных оптических фононах. Причем напряженность постоянного (греющего) поля E_0 , с одной стороны, достаточно велика (электрон успевает ускориться до энергии оптического фонона ω_0 , не испытав рассеяния ни на примеси, ни на акустических фононах),