умножителей и флуктуации потерь энергии заряженных частиц в веществе сцинтиллятора (по методике, изложенной в [4]). Рассматриваемый способ может быть применен для оценки спектра протонов до энергий ~ 1 *Бэв*, при которой зависимость dE/dx от энергии становится слабой.

Эффективность метода иллюстрирует таблица, где представлены отношения счетов μ двух каналов регистрации, соответствующих энерговыделению в сцинтилляторе $\Delta E_1 > 0{,}3$ *Мэв* и $\Delta E_2 > 4{,}2$ *Мэв* для различных спектров протонов, полученные с помощью пластического сцинтиллятора, описанного в [2]. Из таблицы следует, что для протонов галактических космических лучей, имеющих в основном, энергию несколько *Бэв*, и для внутреннего пояса, где счет в каналах обусловлен протонами с энергией в несколько сотен *Мэв*, соотношения счетов двух каналов регистрации существенно отличаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Константинов Б. П., Голенецкий С. В., Мазец Е. П. и др. «Космические исследования», 8, 923, 1970.
2. Шаврин П. И., Самоненко Ю. А., Разумов Ю. А. и др. «Геомагнетизм и аэрономия», № 2, 1972.
3. Сенчуро И. Я., Яковлев Б. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астр., № 1, 1964.
4. Акимов Ю. К. Сцинтилляционные методы регистрации частиц больших энергий. Изд-во МГУ, 1963.

Поступила в редакцию
12.10.1971 г.

НИИЯФ

УДК 534.121.014.2

В. П. КАНДИДОВ, С. С. ЧЕСНОКОВ

ТРЕУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Метод конечных элементов в настоящее время широко применяется для расчета динамики и статики разнообразных конструкций. Для многих практических задач возникает необходимость в конечных элементах треугольной формы.

В литературе, например [1—4], известны треугольные элементы различного типа, имеющие от 9 до 21 степени свободы. При использовании этих элементов результаты расчета существенно зависят от их ориентации в разбиении. Указанный недостаток

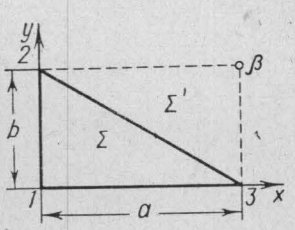

Рис. 1

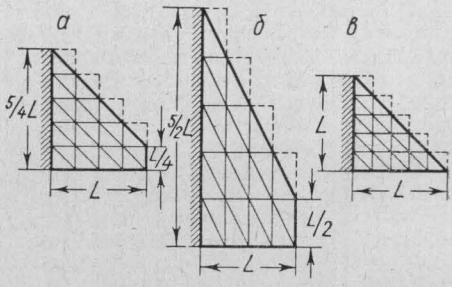

Рис. 2

можно считать частично устраненным, для элементов, описанных в [4], так как они допускают применение совместно с прямоугольными элементами [5]. Вместе с тем из соображений единообразия оказывается удобным использовать элементы одной конфигурации.

В настоящей работе предлагается элемент в виде прямоугольного треугольника, имеющий четыре степени свободы. Его ориентация не влияет на результаты расчета, поскольку два таких элемента, повернутые на 180°, при совмещении образуют известный прямоугольный элемент.

Рассмотрим элемент Σ в виде прямоугольного треугольника с узлами *1, 2, 3* (рис. 1), где D —его цилиндрическая жесткость, ρ — поверхностная плотность. Дополним элемент до прямоугольника $\Sigma+\Sigma'$, введя дополнительный узел β. При этом положим, что на Σ' имеет место $D=\rho=0$. Взяв форму прогиба прямоугольника в виде степенного ряда, можно вычислить матрицы жесткости K_{12}^{Δ} и массы M_4^{Δ} по известным формулам [6].

Элемент с матрицей масс M_4^{Δ} имеет 4 степени свободы. Два таких элемента, повернутые на 180°, при совмещении образуют прямоугольный элемент, описанный в [6]. Поэтому при разбиении их удобно ориентировать так, чтобы они образовали прямоугольную сетку (рис. 2). Исключение составляют треугольные элементы вдоль скошенного края, так как их дополнительные узлы лежат за контуром пластины. Для этих узлов граничные условия формулируются так же, как и для узлов, лежащих на границе. Число степеней свободы модели совпадает с числом свободных узлов R. Так, например, модели а и б, изображенные на рис. 2, имеют 18 степеней свободы, модель *в* — 20. В их число входят степени свободы дополнительных узлов.

Можно уменьшить число степеней свободы модели, если для треугольных элементов, расположенных на свободном скошенном краю, использовать упрощенную матрицу масс. Для ее получения возьмем следующую систему базисных функций [6]:

$$\psi_{1r}=\left\{1,\ \frac{x}{a},\ \frac{y}{6},\ 0\right\},\qquad r=1,\ 2,\ 3,\ \beta.$$

Отличный от нуля блок M_3 матрицы масс при $\rho=\text{const}$ имеет вид

$$M_3=\frac{\rho ab}{24}\begin{Vmatrix}2&1&1&0\\1&2&1&0\\1&1&2&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix}.$$

Пластина	Матрица элемента	K_{12}^{Δ}		по [4]	Эксперимент
		M_4^{Δ}	M_3^{Δ}	M_3	
а	R / № тона	18	14	14	[8]
	1	4,63	4,63	4,03	4,49
	2	16,4	16,7	16,3	17,0
	3	25,9	25,8	26,2	24,4
	4	39,2	41,1	41,6	40,5
	5	65,7	68,5	70,0	62,1
б	R / № тона	18	14	—	[8]
	1	4,22	4,21	—	4,10
	2	10,3	10,4	—	10,15
	3	20,1	20,4	—	19,42
	4	24,8	24,7	—	23,2
	5	34,9	35,7	—	32,6
в	R / № тона	20	15	40 (по [2])	[2]
	1	6,45	6,45	6,20	5,8±2%
	2	23,4	23,7	23,6	23 ±2%
	3	34,9	35,0	32,8	32 ±2%
	4	55,9	58,3	56,4	55 ±2%
	5	84,4	85,1	77,0	75 ±2%

В этом случае из граничных условий в дополнительных узлах β следует, что их обобщенные координаты становятся зависимыми от координат остальных узлов. Исключив координаты дополнительного узла, можно понизить до девяти порядок матрицы жесткости для элемента, у которого гипотенуза совпадает со свободным краем.

В качестве примера использования предлагаемых элементов рассмотрим свободные колебания консольных пластин, изображенных на рис. 2. Для них вычислены на ЦВМ безразмерные собственные частоты $\alpha = \omega / \sqrt{\frac{D}{\rho L^4}}$ на первых пяти тонах.

Значения α приведены в таблице, где указаны используемые матрицы жесткости и масс, а также число степеней свободы модели R. Там же даны экспериментальные результаты, взятые из [2 и 7].

Из таблицы (а и б) видно, что для рассмотренных параметров треугольный элемент обеспечивает удовлетворительную для практики точность при небольшом числе степеней свободы ($R=18$). Ошибка по сравнению с экспериментом для рассчитанных тонов не превышает 7%. Уменьшение R до 14 введением матрицы M_3 дает ошибку до 10%. Заметим, что при использовании известного [4] треугольного элемента ошибка возрастает до 13% для того же R; в частности, по первому тону она составляет 10%. В случае (в) полученные результаты хорошо согласуются с расчетом по методу конечных элементов [2], где используется вдвое большее число степеней свободы.

Авторы выражают благодарность проф. С. П. Стрелкову за ценные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morley L. S. D. The Aeronautical Quarterly, 19, 149—169, 1969.
2. Каупер, Коско, Линдберг, Олсон. «Ракетная техника и космонавтика», № 10, 1969.
3. Bell K. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1, No. 1, 1969.
4 Zienkiewicz O. C. «The finite element method in structural and continuum mechanics». Mc Graw — Hill, 1967.
5. Дикенсон, Хеншелл. «Ракетная техника и космонавтика», № 3, 1969.
6. Кандидов В. П., Чесноков С. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 12, № 1, 1972.
7. Maymon G., Kornecki A. Israel Journal of Technology, 4, 1966.

Поступила в редакцию
25.10 1971 г.

Кафедра общей физики
для мехмата

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ, Р. Э. ШИХЛИНСКАЯ

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ СПЕКТРА ШУМА ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Известно, что эксперименты по исследованию шума струи в звуковой области частот дают зависимость спектральной плотности мощности шума p (на единицу массы газа) от частоты излучения f, близкую к f^{-2} [1]. Для этих экспериментов числа Рейнольдса, рассчитанные по масштабам макровихрей, имеют величины $10^6 \div 10^7$. Можно считать поэтому, что излучение обусловлено вихрями, входящими в достаточно широкую инерциальную подобласть спектра турбулентности.

Найдем зависимость P от f для этого случая, пользуясь соображениями подобия и размерности. Основными параметрами, определяющими P, будут характерная частота излучения $f = \frac{v}{l}$ (где v и l — соответственно характерные скорость и масштаб вихрей), c — скорость распространения акустического возмущения и ε — скорость диссипации энергии единицы массы. На основании П-теоремы метода теории подобия и размерностей [2] найдем функциональную связь между параметрами f, c и ε:

$$P = \varepsilon f^{-1} F\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/2} f^{-4/3}}\right), \tag{1}$$

где F — функция безразмерного аргумента.