

В этом случае из граничных условий в дополнительных узлах β следует, что их обобщенные координаты становятся зависимыми от координат остальных узлов. Исключив координаты дополнительного узла, можно понизить до девяти порядок матрицы жесткости для элемента, у которого гипотенуза совпадает со свободным краем.

В качестве примера использования предлагаемых элементов рассмотрим свободные колебания консольных пластин, изображенных на рис. 2. Для них вычислены на

ЦВМ безразмерные собственные частоты $\alpha = \omega / \sqrt{\frac{D}{\rho L^4}}$ на первых пяти тонах.

Значения α приведены в таблице, где указаны используемые матрицы жесткости и масс, а также число степеней свободы модели R . Там же даны экспериментальные результаты, взятые из [2 и 7].

Из таблицы (а и б) видно, что для рассмотренных параметров треугольный элемент обеспечивает удовлетворительную для практики точность при небольшом числе степеней свободы ($R=18$). Ошибка по сравнению с экспериментом для рассчитанных тонов не превышает 7%. Уменьшение R до 14 введением матрицы M_3 дает ошибку до 10%. Заметим, что при использовании известного [4] треугольного элемента ошибка возрастает до 13% для того же R ; в частности, по первому тону она составляет 10%. В случае (в) полученные результаты хорошо согласуются с расчетом по методу конечных элементов [2], где используется вдвое большее число степеней свободы.

Авторы выражают благодарность проф. С. П. Стрелкову за ценные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morley L. S. D. The Aeronautical Quarterly, 19, 149—169, 1969.
2. Каупер, Коско, Линдберг, Олсон. «Ракетная техника и космонавтика», № 10, 1969.
3. Bell K. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1, No. 1, 1969.
4. Zienkiewicz O. C. «The finite element method in structural and continuum mechanics». Mc Graw — Hill, 1967.
5. Дикенсон, Хеншелл. «Ракетная техника и космонавтика», № 3, 1969.
6. Кандидов В. П., Чесноков С. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., astron., 12, № 1, 1972.
7. Маумон G., Корнецкий A. Israel Journal of Technology, 4, 1966.

Поступила в редакцию
25.10 1971 г.

Кафедра общей физики
для мехмата

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ, Р. Э. ШИХЛИНСКАЯ

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ СПЕКТРА ШУМА ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Известно, что эксперименты по исследованию шума струи в звуковой области частот дают зависимость спектральной плотности мощности шума p (на единицу массы газа) от частоты излучения f , близкую к f^{-2} [1]. Для этих экспериментов числа Рейнольдса, рассчитанные по масштабам макровихрей, имеют величины $10^6 \div 10^7$. Можно считать поэтому, что излучение обусловлено вихрями, входящими в достаточно широкую инерциальную подобласть спектра турбулентности.

Найдем зависимость P от f для этого случая, пользуясь соображениями подобия и размерности. Основными параметрами, определяющими P , будут характерная частота излучения $f = \frac{v}{l}$ (где v и l — соответственно характерные скорость и масштаб вихрей), c — скорость распространения акустического возмущения и ε — скорость диссипации энергии единицы массы. На основании П-теоремы метода теории подобия и размерностей [2] найдем функциональную связь между параметрами f , c и ε :

$$P = \varepsilon f^{-1} F \left(\frac{c}{\varepsilon^{1/2} f^{-4/3}} \right), \quad (1)$$

где F — функция безразмерного аргумента.

Воспользуемся представлением о квадрупольном механизме излучения шума турбулентностью [3, 4], согласно которому $P \sim c^{-5}$. При этом допущении легко находится вид функции F и

$$P \sim \varepsilon^{1/2} c^{-5} f^{-7/2}. \quad (2)$$

Полученная зависимость P от f близка к зависимости, полученной теоретически в работах [5 и 6] другими методами. Эта зависимость не дает полного совпадения с экспериментом, согласно которому, как указывалось выше, $P \sim f^{-2}$; по-видимому, это объясняется тем, что турбулентная струя имеет сложное строение и модель однородной и изотропной турбулентности, принятая в основу теоретических оценок, является слишком грубой идеализацией.

Спектр шума турбулентной струи распространяется далеко за звуковую область. Так, в [7] наблюдались частоты порядка мегагерца; при этом до частот ~ 300 кГц $P \sim f^{-(5 \div 6)}$. Естественно предположить, что излучение на таких высоких частотах создается турбулентными вихрями, входящими уже в вязкую подобласть спектра турбулентности. Представляет интерес произвести оценку зависимости P от f для этого случая.

Следует считать, что вязкость должна приводить к уменьшению мощности излучения шума. В (2) можно ввести некоторую безразмерную функцию $\varphi(f/f^*)$, где $f^* = \varepsilon^{1/2} \nu^{-1/2}$. Условием нормировки будет $\varphi=1$ при $f \ll f^*$ и $\varphi \ll 1$ при $f \gg f^*$. Если положить $\varphi = (1 + f/f^*)^{-n}$, то для вязкой подобласти спектра получим (оставляя в силе предположение о квадрупольном характере излучения звука):

$$P \sim \varepsilon^{1/2} c^{-5} f^{-7/2} (1 + f/f^*)^{-n}. \quad (3)$$

В инерционной подобласти имеет место колмогоровский спектр турбулентности и спектральная плотность энергии $E(k) \sim k^{-5/3}$, где k — пространственное волновое число. Для вязкой подобласти предложено несколько видов спектра, например, $E(k) \sim k^{-7}$ [8].

Если предположить, что спектр излучения шума при переходе от инерционной к вязкой подобласти спектра меняется подобным же образом, как и спектр турбулентности, то $n=5$ и для $f \gg f^*$ получим

$$P \sim c^{-5} f^{-8,5} \varepsilon^{6/5} \nu^{-2,5}. \quad (4)$$

Выражение для P в случае вязкой подобласти спектра можно получить, исходя из уравнений генерации шума турбулентности методом, который использовался в [6] при рассмотрении инерционной подобласти спектра. Воспользуемся выражением, приведенном в [6] для спектральной плотности мощности излучения на единицу массы:

$$P = \frac{1}{8\pi^2 c^5} \int d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\xi}\vec{\tau}} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \tilde{F}(\vec{\xi}, \tau) d\tau, \quad (5)$$

где $\vec{\xi}$, τ — пространственный и временной масштабы корреляции; $\tilde{F}$ — лагранжевая пространственно-временная корреляция давления.

Для вязкой подобласти спектра турбулентности можно представить функцию $\tilde{F}(\vec{\xi}, \tau)$ в виде

$$\tilde{F}(\vec{\xi}, \tau) = \nu^{-2} \varepsilon^2 \xi^4 \Psi(\chi), \quad (6)$$

где $\Psi(\chi)$ — некоторая функция безразмерного аргумента $\chi = \varepsilon^{1/3} \xi^{-2/3} \tau$.

Подставляя (6) в выражение (5) и проводя анализ выражения (5) методом, аналогичным изложенному в работе [6], найдем ту высокочастотную часть спектра, где существенна вязкость:

$$P \sim c^{-5} \nu^{-2} \varepsilon^{5,5} f^{-7,5}. \quad (7)$$

Отметим, что полученное выражение мало отличается от (4). Характер спада P с частотой для случая вязкой подобласти спектра находится в качественном согласии с данными эксперимента, хотя теория дает более быстрое уменьшение P с частотой, чем эксперимент. По-видимому, на более высоких частотах, чем 300 кГц, можно ожидать лучшего согласия эксперимента с теорией, поскольку представление о вязкой подобласти спектра будет более оправданным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1967.
3. Lighthill M. J. Proc. Roy. Soc. (London), A 211, 564, 1952.
4. Lighthill M. J. Proc. Roy. Soc. (London), A 222, 11, 1954.
5. Powell A. J. Acoust. Soc. Am., 31, No. 6, 1959.
6. Meecham W., Ford G. J. Acoust. Soc. Am., 30, 348, 1958.
7. Красильников В. А., Шихлинская Р. Э. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 72, 1964.
8. Монин А. С., Яглом А. М. «Статистическая гидромеханика», ч. II. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
4.10 1971 г.

Кафедра
акустики

В № 4 — 1972 г. «Вестника Московского университета» сер. физики, астрономии обнаружены следующие опечатки по вине авторов:

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
434	формула (4)	$\left(\frac{a_0}{\langle x_\alpha^2 \rangle^{1/2}} \right)$	$\left(\frac{a_0}{\langle x_\alpha^2 \rangle^{1/2}} \right)^2$
435	формула (7)	$\left(\frac{a_0}{\langle x_\alpha^2 \rangle^{1/2}} \right)$	$\left(\frac{a_0}{\langle x_\alpha^2 \rangle^{1/2}} \right)^2$

На стр. 431, 437 и 474 в ссылке на работу А. А. Власова и В. Н. Кураева в «Вестнике Московского университета» вместо тома 12, следует читать 13.