Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1972

УДК 533.723:536.750:53:519.25

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, А. А. ПЛАТОНОВ

ОДНОРОДНОЕ ИЗОТРОПНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ЛИНЕЙНО-КУБИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Найдены коэффициенты кинетического уравнения для броуновской частицы в линейно-кубическом приближении в предположении изотропности. Показано, что в данном случае феноменологическое релаксационное уравнение оставляет неопределенными два параметра, которые должны быть определены дополнительно.

Классическая теория броуновского движения [1, 2] позволяет, как известно, вычислять коэффициент диффузии, выражая его через такой диссипационный параметр, как коэффициент вязкого трения. Этот важный результат относится к линейной неквантовой флуктуационно-диссипационной термодинамике. В ряде последующих работ (например, [3]) по броуновскому движению рассматривается диффузионный процесс в фазовом пространстве. В них также записывается уравнение Фоккера—Планка, но в пространстве большего числа измерений. Чтобы найти величину диффузионного коэффициента (в пространстве скоростей), в них также приходится использовать соотношения, относящиеся к линейной флуктуационно-диссипационной термодинамике.

Поэтому все исследования броуновского движения, основанные на уравнении Эйнштейна—Фоккера—Планка, можно назвать теорией броуновского движения в линейном приближении.

Однако уравнение Больцмана, в котором члены со второй (и частично с первой) производной заменяются интегралом соударений [4], выходит за рамки указанного приближения. Вследствие сложного вида интегрального члена уравнение Больцмана затруднительно применять для расчета броуновского движения, да в этом и нет особой необходимости, поскольку условие относительно большой величины частицы позволяет упростить это уравнение. Крайняя степень этого упрощения и есть упомянутое уравнение линейного приближения.

Представляет интерес исследовать несколько менее упрощенное, чем уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка, но более точное уравнение линейно-квадратично-кубического приближения. Поясним его подробнее.

Начнем с уравнения Больцмана, которое, если применить известное [5] представление интегрального члена в виде ряда дифференциальных, имеет вид

$$\dot{w} = -\vec{v}\,\nabla_x w + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial v_{\sigma_1} \ldots \partial v_{\sigma_s}} [K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(v)\, w] \tag{1}$$

(ведется суммирование по дважды встречающимся индексам). Здесь

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{v}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M [\Delta v_{\sigma_1} \ldots \Delta v_{\sigma_s} | \vec{v}] \tag{2}$$

кинетические коэффициенты. Последние представим рядом Маклорена

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{v}) = \sum_{l=0}^{\infty} q_{\sigma_1 \ldots \sigma_s,\, \tau_1 \ldots \tau_l} v_{\tau_1} \ldots v_{\tau_l}. \tag{3}$$

Упрощения уравнения (1) строятся следующим образом: отбрасываются более высокие (чем определенные) члены разложений (1), (3). Крайняя степень упрощения — уравнение линейного (двухиндексного) приближения:

$$\dot{w} = -\vec{v}\,\nabla_x w - \frac{\partial}{\partial v_\sigma} [(q_\sigma + q_{\sigma,\tau} v_\tau)\, w] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_\sigma \partial v_\rho} [q_{\sigma\rho}\, w]. \tag{4}$$

Уравнение линейно-квадратичного (или двух-трех-индексного) приближения таково:

$$\dot{w} = -\vec{v}\,\nabla_x w - \frac{\partial}{\partial v_\sigma} \left[\left(q_\sigma + q_{\sigma,\tau} v_\tau + \frac{1}{2} q_{\sigma,\tau\rho} v_\tau v_\varphi\right) w\right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_\sigma \partial v_\rho} [(q_{\sigma\rho} + q\sigma_{\sigma,\rho\tau} v_\tau)\, w] - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial v_\sigma \partial v_\rho \partial v_\pi} [q_{\sigma\rho}\pi w]. \tag{5}$$

Ясен принцип построения и более высоких приближений. В линейно-квадратично-кубическом (двух-трех-четырехиндексном приближении) оставляются такие и только такие кинетические коэффициенты:

$$K_\sigma(\vec{v}) - \frac{F_\sigma}{M} = q'_\sigma + q_{\sigma,\tau} v_\tau + \frac{1}{2} q_{\sigma,\tau\varphi} v_\tau v_\varphi + \frac{1}{6} q_{\sigma,\tau\varphi\chi} v_\tau v_\varphi v_\chi;$$

$$K_{\sigma\rho}(\vec{v}) = q_{\sigma\rho} + q_{\sigma\rho,\tau} v_\tau + \frac{1}{2} q_{\sigma\rho,\tau\varphi} v_\tau v_\varphi; \tag{6}$$

$$K_{\sigma\rho\tau}(\vec{v}) = q_{\sigma\rho\tau} + \frac{1}{2} q_{\sigma\rho\tau,\pi} v_\pi;$$

$$K_{\sigma\rho\tau\pi}(\vec{v}) = q_{\sigma\rho\tau\pi}$$

$\left(\text{обозначено } q'_\sigma = q_\sigma - \frac{F_\sigma}{M}\right)$.

В различные приближения входит большое (и прогрессирующее с повышением точности приближения) число коэффициентов или параметров q. Число независимых параметров q, однако, уменьшается, во-первых, потому, что между параметрами имеется универсальная связь, накладываемая феноменологической теорией флуктуационно-диссипационной термодинамикой. Во-вторых, потому, что число независимых параметров уменьшается вследствие соображений симметрии, в данном случае вследствие изотропности (инвариантности относительно поворотов). Изотропность в данной задаче (броуновское движение) приводит к тому, что уравнение (5) обращается в (4), так что эффекты квадратичной теории выпадают, и ближайшим обобщением линейного приближения будет линейно-кубическое (двух-трехиндексное) приближение, связанное с формулами (6).

Для определения коэффициентов или параметров соответствующего кинетического уравнения (см. (8)) требуется применять помимо соотношений линейной неквантовой флуктуационно-диссипационной термодинамики, также соотношения кубической (четырехиндексной) теории [6—7]. В отличие от линейной и квадратичной теории в кубической флуктуационно-диссипационной термодинамике, как известно, флуктуационные коэффициенты не полностью определяются диссипационными коэффициентами.

В настоящей статье показано, что в рассматриваемом случае броуновского движения вследствие изотропности в кубическом приближении имеются лишь два диссипационно-неопределяемых коэффициента. Их следует определять, обращаясь к элементам, входящим в первоначальный интеграл соударений, или производя специальные экспериментальные измерения каких-то флуктуационных характеристик.

Уравнение Больцмана и соответствующие ему коэффициенты

Предполагаем, что выполнены все предпосылки справедливости уравнения Больцмана. Броуновская частица, описываемая плотностью распределения $w(\vec{x}, \vec{v}, t)$, испытывает соударения с молекулами однородного изотропного газа, молекулы которого имеют равновесное распределение вероятностей по скоростям

$$p_0(\vec{v}_2) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv_2^2}{2T}}. \tag{7}$$

Число молекул газа в единице объема обозначим n_0. Уравнение Больцмана для w в обычных обозначениях [4] имеет вид

$$\dot{w} = -\vec{v}\nabla_x w - \frac{\vec{E}(\vec{x}, t)}{M}\nabla_v w + \iint [w(\vec{x}', \vec{v}', t) f_2(\vec{v}_2') - \\ - w(\vec{v}, \vec{x}, t) f_2(\vec{v}_2)]\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2, \tag{8}$$

где $f_2(\ldots) = n_0 p_0(\ldots)$; индекс 1, который должен стоять у величин, относящихся к броуновской частице, опущен; M — ее масса; $\vec{F}(\vec{x}, t)$ — внешняя сила. В (8), как всегда, $g = |\vec{v} - \vec{v}_2|$, в $\vec{v}_2'$, $\vec{v}'$ — определенные функции

$$\vec{v}' = \varphi_1(\vec{v}, \vec{v}_2, b, \varepsilon), \quad \vec{v}_2' = \varphi_2(\vec{v}, \vec{v}_2, b, \varepsilon), \tag{9}$$

которые отыскиваются по законам механики, если задан закон взаимодействия частицы с молекулой, т. е. динамически вычисляемые.

Уравнение (8) эквивалентно уравнению (1) при следующем определении:

$$K_\sigma(\vec{v}) = \frac{F_\sigma}{M} + n_0 \int (v_\sigma' - v_\sigma)\, p_0(\vec{v}_2)\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2, \\ K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{v}) = n_0 \int (v_{\sigma_1}' - v_{\sigma_1}) \ldots (v_{\sigma_s}' - v_{\sigma_s})\, p_0(\vec{v}_2)\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2 \tag{10}$$

кинетических коэффициентов (2). Вследствие этих формул кинетические коэффициенты тоже динамически вычисляемы. Однако не всегда имеется надобность в их динамическом вычислении, можно пойти и по другому пути. Так, среднее ускорение частицы

$$\frac{\vec{F}}{M} + n_0 \int (\vec{v}' - \vec{v})\, p_0(\vec{v}_2)\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2,$$

или, что то же самое, средняя сила трения

$$F_{\text{тр}} = n_0 M \int (\vec{v}' - \vec{v})\, p_0(\vec{v}_2)\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2, \tag{11}$$

как функция от $\vec{v}$ может быть легко измерена экспериментально или получена при помощи какой-либо феноменологической теории типа вязкой гидродинамики. Прочие коэффициенты могут быть частично определены через (11) при помощи соотношений флуктуационно-диссипационной термодинамики.

Чтобы записать эти соотношения, введем в рассмотрение, следуя [6, 7], «изображения»

$$\varkappa_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{y}) = \int K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{v})\, w_y(\vec{v})\, d\vec{v} \tag{12}$$

кинетических коэффициентов (2) и (10). Здесь

$$w_y(\vec{v}) = e^{-\frac{Ty^2}{2M}} w_0(\vec{v})\, e^{-\vec{y}\vec{v}} = \left(\frac{M}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{M}{2T}\left(\vec{v} - \frac{T}{M}\vec{y}\right)} \tag{13}$$

вспомогательное «скошенное» распределение. Независимые переменные y_σ имеют физический смысл переменных, термодинамически сопряженных с исходными переменными v_σ. Их можно определить формулами

$$y_\sigma(\vec{v}) = -\frac{\partial \ln w_0(\vec{v})}{\partial v_\sigma}, \text{ т. е. } y_\sigma(\vec{v}) = \frac{M}{T} v_\sigma, \tag{14}$$

поскольку $w_0(\vec{v}) = c \exp\left\{-\frac{Mv^2}{2T}\right\}$ — равновесное распределение.

Соотношения флуктуационно-диссипационной термодинамики затрагивают производные в нуле «изображения» (12). Обозначим их так:

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s, \tau_1 \ldots \tau_e} = \left[\frac{\partial^e \varkappa_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}(\vec{y})}{\partial y_{\tau_1} \ldots \partial y_{\tau_e}}\right]_{y=0}. \tag{15}$$

В тех случаях, когда ширина $(T/M)^{1/2}$ «скошенного» распределения (13) много меньше масштаба нелинейности $\Delta_{\text{нел}} \sim \left[\frac{\partial^2 f(\vec{v})}{\partial v \partial v} \Big/ f(\vec{v})\right]^{1/2}$ функции $f(\vec{v})$, имеет место приближенное равенство

$$\int f(\vec{v})\, W_y(\vec{v})\, d\vec{v} \approx f[\vec{v}(\vec{y})], \tag{16}$$

где

$$\vec{v}(\vec{y}) = \frac{T}{M} \vec{y} \tag{17}$$

зависимость, обратная (14), т. е. уравнение наиболее вероятной точки «скошенного» распределения (13). В справедливости (16) можно убедиться, разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора в наиболее вероятной точке (17) или в точке $M[\vec{v}|\vec{y}]$, которая, вообще говоря, совпадает или близка к первой.

Предполагая, что условие относительной остроты распределения $w_y(\vec{v})$ выполняется, путем применения соотношения (16) к формулам (12) получаем асимптотические формулы

$$\varkappa_{\sigma_1\ldots\sigma_s}(\vec{y}) = K_{\sigma_1\ldots\sigma_s}[\vec{v}(\vec{y})] = K_{\sigma_1\ldots\sigma_s}\left(\frac{T}{M}\vec{y}\right). \quad (18)$$

Используя последние, легко выразить производные (15) через входящие в (3) производные (в нулевой точке) кинетических коэффициентов по скоростям

$$K_{\sigma_1\ldots\sigma_s,\tau_1\ldots\tau_l} \approx \left(\frac{T}{M}\right)^l q_{\sigma_1\ldots\sigma_s,\tau_1\ldots\tau_l} \quad (19)$$

(s и l любые).

Используемые соотношения флуктуационно-диссипационной термодинамики

В рассматриваемой задаче нужно использовать следующие нетривиальные термодинамические соотношения: линейное соотношение

$$K_{\sigma,\tau} = -\frac{1}{2}K_{\sigma\tau} \quad (20)$$

(см. (II.1.в) из [8]) и соотношения кубической теории

$$K_{\sigma\rho\pi,\tau} = -\frac{1}{2}K_{\sigma\rho\pi\pi,\tau}, \quad (21)$$

$$2K_{\pi,\rho\sigma\tau} + K_{\pi\rho,\sigma\tau} + K_{\pi\sigma,\rho\tau} + K_{\pi\tau,\sigma\rho} = \frac{1}{2}K_{\pi\rho\sigma\tau} \quad (22)$$

(см. (IV.3.д.) и (IV.1.д) из [7]). Согласно [6—7] эти соотношения точные, хотя они и записаны в [7] в форме асимптотических. Дадим независимый от [6—7] их динамический вывод применительно к нашему случаю.

Докажем сначала такое тождество:

$$J\{v'_{\sigma_1}\ldots v'_{\sigma_s}v_{\tau_1}\ldots v_{\tau_l}\} = J\{v_{\sigma_1}\ldots v'_{\sigma_s}v'_{\tau_1}\ldots v'_{\tau_l}\}, \quad (23)$$

где обозначено

$$J\{\ldots\} = n_0\int\ldots w_0(\vec{v})\,p_0(\vec{v}_2)\,gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2 d\vec{v} \quad (24)$$

(w_0, p_0 — встречающиеся в (7) и (14) равновесные распределения). Вследствие сохранения энергии при соударении имеем $w_0(\vec{v})\ p_0(\vec{v}_2) = w_0(\vec{v}')p_0(\vec{v}_2')$. Далее $d\vec{v}d\vec{v}_2 = d\vec{v}''d\vec{v}_2'$ вследствие теоремы Лиувилля.

Дифференциальный элемент $gbdbd\varepsilon = 2gb\cos^{-1}\frac{\chi}{2}\left|\frac{\partial b}{\partial\chi}\right|d\vec{k}$ (см. [4] стр. 84, 85) инвариантен относительно замены пары $(\vec{v},\ \vec{v}_2)$ на пару $(\vec{v}',\ \vec{v}_2')$, поскольку вектор $\vec{K}$ — один и тот же и для прямого и для обратного движения взаимодействующих частиц и поскольку $g=g'$, $b=b'$ (закон сохранения импульса), $|\chi| = |\chi'|$. Итак, мы доказали, что

$$\int v'_{\sigma_1} \ldots v_{\tau_1} \ldots w_0(\vec{v})\, p_0(\vec{v}_2)\, gbdbd\varepsilon d\vec{v}_2 d\vec{v} =$$

$$= \int v'_{\sigma_1} \ldots v_{\tau_1} \ldots w_0(\vec{v}')\, p_0(\vec{v}'_2)\, g'b'db'd\varepsilon' d\vec{v}' d\vec{v}'_2 .$$

Отсюда с очевидностью получим (23), если поменяем обозначения штрихованных и нештрихованных скоростей.

Применим (23). Продифференцируем (12) в нуле и подставим (10) под знак интеграла. Используя обозначения (15) и (24), получим

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s, \tau} = J\{(v'_{\sigma_1} - v_{\sigma_1}) \ldots (v'_{\sigma_s} - v_{\sigma_s})\, v_\tau\}. \tag{25}$$

Если же положить в (12) $\vec{y}=0$ без дифференцирования, то, очевидно:

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s \tau} = J\{(v'_{\sigma_1} - v_{\sigma_1}) \ldots (v'_{\sigma_s} - v_{\sigma_s})\, (v'_\tau - v_\tau)\} =$$

$$= J\{(v'_{\sigma_1} - v_{\sigma_1}) \ldots (v'_{\sigma_s} - v_{\sigma_s})\, v'_\tau\} - J\{(v'_{\sigma_1} - v_{\sigma_1}) \ldots (v'_{\sigma_s} - v_{\sigma_s})\, v_\tau\}. \tag{26}$$

Последнее выражение вследствие (23) можно записать так:

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s \tau} = J\{(v_{\sigma_1} - v'_{\sigma_1}) \ldots (v_{\sigma_s} - v'_{\sigma_s})\, v_\tau\} - J\{(v'_{\sigma_1} - v_{\sigma_1}) \ldots (v'_{\sigma_s} - v_{\sigma_s})\, v_\tau\}$$

или, согласно (25):

$$K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s \tau} = [(-1)^s - 1]\, K_{\sigma_1 \ldots \sigma_s \tau} . \tag{27}$$

Отсюда, в частности, вытекают доказываемые соотношения (20) и (21).

Для доказательства оставшегося соотношения (22) применим аналогичный метод. Воспользуемся равенствами

$$K_{\pi,\rho\sigma\tau} = J\{(v'_\pi - v_\pi)\, v_\rho v_\sigma v_\tau\} - \frac{M}{T}\,(\delta_{\sigma\rho} K_{\pi,\tau} + \delta_{\sigma\tau} K_{\pi,\rho} + \delta_{\tau\rho} K_{\pi,\sigma}), \tag{28}$$

$$K_{\pi\rho,\sigma\tau} = J\{(v'_\pi - v_\pi)\,(v'_\rho - v_\rho)\, v_\sigma v_\tau\} - \frac{M}{T}\, \delta_{\sigma\tau} K_{\pi\rho},$$

которые, как и (25), получаются дифференцированием (12) в нулевой точке. В выражении

$$K_{\pi\rho\sigma\tau} = J\{(v'_\pi - v_\pi)\,(v'_\rho - v_\rho)(v'_\sigma - v_\sigma)\,(v_{\tau'} - v_\tau)\} =$$

$$= J\{(v'_\pi - v_\pi)\,[v'_\sigma v'_\rho v'_\tau - v'_\rho v'_\sigma v_\tau - v'_\sigma v'_\tau v_\rho - v'_\rho v_\sigma v'_\tau +$$

$$+ v'_\rho v_\sigma v_\tau + v'_\sigma v_\rho v_\tau + v'_\tau v_\rho v_\sigma - v_\tau v_\rho v_\sigma]\}$$

преобразуем по формуле (23) члены с двумя и тремя штрихованными сомножителями в квадратных скобках, учитывая (28), в результате получим (22). Все члены, содержащие M/T, выпадут вследствие (20). Какие-либо другие соотношения, кроме общетермодинамических, данным методом получить не удалось.

Использование условия изотропности

Условие изотропности сильно уменьшает число независимых коэффициентов q в разложениях типа (6). Например, первая формула из (6) принимает простой вид

$$K_\sigma(\vec{v}) - \frac{F_\sigma}{M} = a v_\sigma + b v^2 v_\sigma. \tag{29}$$

Чтобы в этом убедиться, возьмем некоторый произвольный вектор $\vec{u}$ и образуем скаляр

$$\vec{u}\left[\vec{F}(\vec{v})-\frac{\vec{K}}{M}\right]=q'_\sigma u_\sigma+q_{\sigma,\tau}u_\sigma v_\tau+\frac{1}{2}q_{\sigma,\tau\varphi}u_\sigma v_\tau v_\varphi+\frac{1}{6}q_{\sigma,\tau\varphi\chi}u_\sigma v_\tau v_\varphi v_\chi. \quad (30)$$

Вследствие изотропности в него не должны входить никакие вектора и тензоры, кроме $\vec{u}$, $\vec{v}$ (в пространстве нет никаких исключительных направлений и тензоров; сила $\vec{F}$ в счет не идет), т. е. $\vec{u}\vec{K}(\vec{v})$ является функцией только от $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Из $\vec{u}$ и $\vec{v}$ можно построить только такие скаляры: u^2, v^2, $(\vec{u}\vec{v})$ и всевозможные функции от них. Каждый член в правой части имеет свою определенную степень однородности по $\vec{u}$ и по $\vec{v}$. Они все линейны по $\vec{u}$ и имеют прогрессирующие степени по $\vec{v}$. Из указанных элементарных скаляров нельзя построить полиномиальной функции, линейной по $\vec{u}$ и нулевой степени по $\vec{v}$, а также линейной по $\vec{u}$ и билинейной по $\vec{v}$. Поэтому q'_σ и $q_{\sigma,\tau\varphi}$ следует исключить. Имеется единственная возможность линейного по $\vec{u}$ и линейного по $\vec{v}$ скаляра $(\vec{u}\vec{v})$ и линейного по $\vec{u}$ трилинейного по $\vec{v}$ скаляра $(\vec{u}\vec{v})v^2$. Числовые коэффициенты, разумеется, произвольны. Указанные скаляры приводят к формуле (29). Ей соответствуют такие ненулевые коэффициенты:

$$q_{\sigma,\tau}=a\delta_{\sigma\tau};\ q_{\sigma,\tau\varphi\chi}=2b\,(\delta_{\tau\varphi}\delta_{\sigma\chi}+\delta_{\tau\chi}\delta_{\sigma\varphi}+\delta_{\tau\sigma}\delta_{\varphi\chi}). \quad (31)$$

Аналогичными же рассуждениями получаем формулу

$$K_{\sigma\rho}(\vec{v})=(c+dv^2)\,\delta_{\sigma\rho}+ev_\sigma v_\rho. \quad (32)$$

Приведенным членам соответствуют скаляры u^2, u^2v^2, $(uv)^2$.

Равенство (32) означает, что

$$q_{\sigma\rho}=c\delta_{\sigma\rho};\ q_{\sigma\rho,\tau\varphi}=2d\delta_{\sigma\rho}\delta_{\tau\varphi}+e\,(\delta_{\sigma\tau}\delta_{\varphi\rho}+\delta_{\sigma\varphi}\delta_{\tau\rho}) \quad (33)$$

(коэффициенты $q_{\sigma,\tau\varphi}$ равны нулю).

Третья формула из (6) приводится к виду

$$K_{\sigma\rho\pi}(\vec{v})=f\,(v_\sigma\delta_{\rho\pi}+v_\rho\delta_{\pi\sigma}+v_\pi\delta_{\rho\sigma}) \quad (34)$$

(скаляр u^2 $(\vec{u}\vec{v})$), т. е.

$$q_{\sigma\rho\pi}=0;\ q_{\sigma\rho\pi,\tau}=f\,(\delta_{\sigma\rho}\delta_{\pi\tau}+\delta_{\sigma\pi}\delta_{\rho\tau}+\delta_{\sigma\tau}\delta_{\rho\pi}). \quad (35)$$

Наконец, последняя формула (6) записывается так:

$$K_{\sigma\rho\pi\tau}=q_{\sigma\rho\pi\tau}=g\,(\delta_{\sigma\rho}\delta_{\pi\tau}+\delta_{\sigma\pi}\delta_{\rho\tau}+\delta_{\sigma\tau}\delta_{\rho\pi}). \quad (36)$$

(скаляр $(u^2)^2$).

Всего в полученные формулы (29), (32), (34), (36) вошло 7 независимых числовых коэффициентов $a, ..., g$. Это число сильно уменьшается благодаря использованию флуктуационно-диссипационных термодинамических соотношений (20)—(22). Учитывая (19) и подставляя первые формулы из (31) и (33) в соотношение линейной теории (20), получаем

$$2\frac{T}{M}a\approx-c. \quad (37)$$

Эта хорошо известная формула (см. [3]), строго говоря, является не точной, а асимптотической, но с очень большой точностью выполняется в рамках обычной теории броуновского движения. То же самое относится и к выводимым ниже новым формулам. Поэтому мы в дальнейшем знак $\approx$ заменим на строгий знак равенства.

Подстановка (35), (36) в (21) при учете (19) приводит к равенству

$$2 \frac{T}{M} f = -g. \tag{38}$$

Наконец, подставляя (31), (33), (36) в (22), находим

$$8\left(\frac{T}{M}\right)^3 b + 4\left(\frac{T}{M}\right)^2 (d+e) = g. \tag{39}$$

В итоге осталось 4 независимых параметра. В качестве них возьмем два диссипационных коэффициента (так как их легче измерять) и каких-либо два флуктуационных параметра, скажем, d и e. Параметр a имеет смысл коэффициента линейного трения, а b — коэффициента кубического трения, точнее, этот смысл имеют производные.

Примечание. Нужно отметить, что приближение, рассматриваемое в данной работе, неприменимо в том случае, когда применим метод Энскога для решения уравнения Больцмана. Последний метод обусловлен требованием, чтобы влияние члена соударений превосходило влияние прочих членов. Это требование выполнено для молекул плотного газа, но не выполняется для рассматриваемых нами (относительно) крупных броуновских частиц. Для них влияние каждого соударения с молекулой невелико, и поэтому суммарная флуктуационная сила соударений, несмотря на большую частоту последних, соизмерима с релаксационной силой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение. Сб. статей под ред. Б. И. Давыдова. М., ОНТИ, 1936.
2. Леонтович М. А. Статистическая физика. М., ГИТТЛ, 1944.
3. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947.
4. Чемпен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., 1960.
5. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.
6. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 84—89, 1967.
7. Стратонович Р. Л. «Вест. Москв. ун-та», физ., астрон., № 5, 479—486; № 6, 699—705, 1970.

Поступила в редакцию
11.6 1971 г.

Кафедра
общей физики
для мехмата