Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1972

А. Х. Ш. БУХАРИ, И. И. МИНАКОВА, А. Г. ФЕДОСЕЕВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ И НЕЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ

Рассмотрены стационарные режимы автогенератора с нелинейным контуром и запаздывающей обратной связью при модуляции реактивного параметра. Получены амплитудные кривые в области параметрической синхронизации. Исследованы условия устойчивости.

Параметрическая синхронизация автогенераторов изучается как для модуляции отрицательного сопротивления [1, 2, 3], так и для модуляции одного из реактивных параметров контура [4].

Особенности параметрической синхронизации при наличии нелинейного контура и запаздывания в обратной связи (т. е. в первую очередь для генераторов СВЧ диапазона) практически не раскрыты. Только проведено исследование [5] потенциально-автоколебательного режима автогенератора с запаздыванием в обратной связи с линейным контуром.

Для многих типов автогенераторов с нелинейным контуром или резонатором при наличии запаздывания в обратной связи уравнение движения при параметрическом воздействии на реактивный параметр может быть записано в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + M\omega_2^0 (S_0 - S_2 x_\tau^2)\, \dot{x}_\tau + \omega_0^2 (1 + m\cos 2pt)\, x + \gamma x^3 = 0. \quad (1)$$

При этом предполагается, что автогенератор одночастотный, нелинейность и глубина модуляции m параметра малы, нелинейный активный элемент имеет симметричную кубическую характеристику, такой же вид имеет и характеристика нелинейного реактивного элемента. При указанных условиях в полосе параметрической синхронизации и при расстройках мало превышающих расстройки, соответствующие границам полосы, движение в системе может быть записано так:

$$x = A\sin(pt - \Phi). \quad (2)$$

Рассматривая задачу для постоянного запаздывания τ, предполагаем, что

$$x_\tau = A\sin[p(t-\tau) - \Phi]. \quad (3)$$

В (2) и (3) A и Φ — зависящие от времени медленно меняющиеся величины.

Уравнения установления можно привести в виде

$$\frac{dA}{dt} = -\delta_{0\tau} A - \frac{1}{4}\delta_{2\tau} A^3 + \frac{1}{4}\frac{1}{p} m\omega_0^2 A \sin 2\Phi, \tag{4}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{p^2-\omega_0^2}{2p} - \frac{M\omega_0^2}{2}\sin p\tau S_0 + \frac{1}{8} MS_2\,\omega_0^2 A^2 \sin pt -$$

$$-\frac{3}{8}\frac{1}{p}\gamma A^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{p} m\omega_0^2 \cos 2\Phi, \tag{5}$$

$$\delta_{0\tau} = \delta + \frac{1}{2} M\omega_0 S_0 \cos p\tau, \quad \delta_{2\tau} = \frac{1}{2} M\omega_0^2 S_2 \cos pt. \tag{6}$$

В автоколебательном режиме $\delta_{0\tau}<0$ при $m=0$ амплитуда стационарного автономного режима равна

$$A_{0\tau}^2 = 4\frac{|\delta_{0\tau}|}{\delta_{2\tau}}. \tag{7}$$

В стационарном синхронном режиме из (4) и (5) можно записать амплитудную кривую:

$$\Delta = \pm\sqrt{\left(\frac{m\omega_0^2}{4p}\right)^2 - \left(\frac{\delta_{2\tau}}{4}\right)^2 (A^2 - A_{0\tau}^2)^2} +$$

$$+\frac{3}{8}\left(\gamma - \frac{p}{3} MS_2\omega_0^2 \sin p\tau\right)\frac{1}{p}A^2 + \frac{1}{2} MS_0\omega_0^2 \sin p\tau, \tag{8}$$

где $\Delta = p - \omega_0$ и $\frac{p+\omega_0}{2p} \approx 1$.

Амплитудная кривая (8), построенная на плоскости Δ, A^2 имеет вид замкнутой кривой второго порядка и симметрична относительно скелетной прямой — линии частот автоколебаний в автономном режиме:

$$\Delta' = \frac{3}{8}\left(\gamma - \frac{p}{3} MS_2\,\omega_0^2 \sin p\tau\right)\frac{1}{p} A^2 + \frac{1}{2} M\,\omega_0^2 S_0 \sin p\tau. \tag{9}$$

Как следует из (9), частота автоколебаний в автономном режиме имеет фиксированный сдвиг относительно собственной частоты колебательной системы, обусловленный запаздыванием $\Delta_\tau = \frac{1}{2} M\,\omega_0^2 S_0 \sin p\tau$. Наличие нелинейного реактивного элемента контура и реактивной составляющей тока через нелинейный активный элемент при $\tau=\text{const}$ приводит к появлению зависимости частоты автоколебаний от амплитуды. При этом можно ввести обозначение

$$\gamma_\tau = \frac{p}{3} MS_2\omega_0^2 \text{ и } \gamma_\text{п} = \gamma - \gamma_\tau.$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в виде

$$\Delta' = \Delta_\tau + \frac{3}{8}\frac{1}{p}\gamma_\text{п} A^2. \tag{10}$$

Наличие запаздывания $\tau \neq 0$ может усилить, ослабить или компенсировать влияние на частоту автоколебаний нелинейности, вносимой в автоколебательную систему нелинейным реактивным параметром.

Исследуя устойчивость найденных стационарных решений, из (4) и (5) получим амплитудное условие устойчивости

$$A^2 > \frac{1}{2} A_{0\tau}^2 \qquad (11)$$

и фазовое (условие вертикальных касательных)

$$\Delta < \frac{\delta_{2\tau}^2}{\left(\frac{6\gamma}{p} - 2MS_2\omega_0^2 \sin p\tau\right)} (A^2 - A_{0\tau}^2) + \Delta_\tau + \frac{3}{8}\,\frac{1}{p}\,\gamma_{п} A^2. \qquad (12)$$

Разберем более подробно изменение вида амплитудной кривой в зависимости от параметров автогенератора. Если положить $\tau = 0$ и $\gamma = 0$, то (8), (11) и (12) приобретут вид

$$\Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{m\omega_0^2}{4p}\right)^2 - \left(\frac{\delta_2}{4}\right)^2 (A^2 - A_0^2)^2}, \qquad (13)$$

$$A^2 > \frac{1}{2} A_0^2, \qquad (14)$$

$$A^2 > A_0^2 \text{ или } \sin 2\Phi > 0. \qquad (15)$$

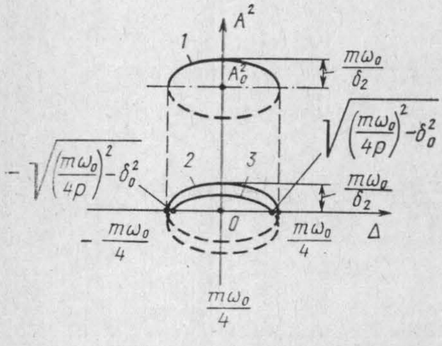

Рис. 1. Амплитудные кривые при $\gamma = 0$ и $\tau = 0$. *1* — $\delta_0 < 0$, *2* и *3* $\delta_0 = 0$

На рис. 1 построена амплитудная кривая (13). Пунктиром обозначена неустойчивая часть амплитудной кривой и нереализуемые случаи $A^2 < 0$.

В стационарном режиме из (4) получим зависимость амплитуды от фазы

$$A^2 = A_0^2 + \frac{m\omega_0}{\delta^2} \sin 2\Phi, \qquad (16)$$

откуда с учетом (15) следует, что параметрическая синхронизация в системе может происходить только при параметрической подкачке энергии за счет источника, изменяющего параметр.

Из (13) можно получить выражение для максимальной устойчивой амплитуды:

$$A_{\max}^2 = A_0^2 + \frac{m\omega_0}{\delta_2} \qquad (17)$$

при оптимальной фазе $\Phi = \frac{\pi}{4}$ и $\Delta = 0$.

Как видно из (17), приращение энергии в системе при $\Delta = 0$ зависит только от глубины модуляции реактивного параметра m и от величины нелинейного затухания δ_2. Следовательно, если характеристика нелинейного элемента и обратная связь неизменны, то при увеличении затухания контура A_0^2 уменьшается, но амплитудная кривая (13), оставаясь по форме неизменной, опускается вниз по оси A^2, пока A_0^2 не станет равным нулю. Нелинейный коэффициент затухания δ_2 при этом не изменяется, соответственно и разность $A_{max}^2 - A_0^2$ остается неизменной при $m = \text{const}$.

Если же уменьшить A_0^2 за счет уменьшения обратной связи, то отклик системы на параметрическое воздействие будет несколько другим. По мере уменьшения $|M|$ амплитудная кривая также опускается вниз по оси A^2. Однако одновременно она вытягивается по оси A^2, так как по мере уменьшения нелинейного затухания

$$\delta_2 = \frac{1}{2} |M| S_2 \omega_0^2 \tag{18}$$

разность $A_{max}^2 - A_0^2$ увеличивается при $m = \text{const}$.

При $\delta_0 < 0$, т. е. пока система автоколебательна, полоса параметрической синхронизации остается неизменной при любых изменениях затухания контура и величины обратной связи (в пределах применимости гармонического приближения). Она равна полосе синхронизации консервативной системы:

$$\Delta_{\text{гр}} = \pm \frac{m\omega_0}{4}. \tag{19}$$

При переходе автогенератора в потенциально-автоколебательный режим, границы областей параметрического возбуждения определяются выражением

$$\Delta_{\text{гр}} = \pm \sqrt{\left(\frac{m\omega_0^2}{4p}\right)^2 - \delta_0^2} \ . \tag{20}$$

Область параметрического возбуждения колебаний обращается в нуль при $\frac{m\omega_0^2}{4p} = \delta_0$. При этом обращается в нуль и максимальная амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний.

В случае $\tau = 0$ и $\gamma \neq 0$ (8) перейдет в

$$\Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{m\omega_0^2}{4p}\right)^2 - \left(\frac{\delta_2}{4}\right)^2 (A^2 - A_0^2)^2} + \frac{3}{8p} \gamma A^2. \tag{21}$$

Амплитудное условие устойчивости будет иметь вид (14), а фазовое

$$\Delta < \frac{p}{6\gamma} \delta_2^2 (A^2 - A_0^2) + \frac{3}{8p} \gamma A^2, \tag{22}$$

значение квадрата максимальной амплитуды определяется уже при $\Delta \neq 0$. Однако выражение для A_{max}^2 совпадает с (17). На рис. 2 показаны две амплитудные кривые (21) для различных значений $\gamma > 0$. С увеличением γ увеличивается наклон скелетной прямой

$$\Delta' = \frac{3}{8p} \gamma A^2. \tag{23}$$

Как видно из рис. 2, при малых γ, т. е. $\gamma = \gamma_1$ по-прежнему устойчивость определяется фазовым условием (22), при больших γ, т. е. $\gamma = \gamma_2$ существенным может оказаться и амплитудное условие (14).

Вследствие наклона амплитудной кривой (21) полоса синхронизации определяется неоднозначно при изменениях расстройки Δ от меньших по абсолютной величине значений к большим и наоборот. В случае изменения Δ от больших значений к меньшим, полоса синхронизации мало отличается от полосы синхронизации консервативной системы.

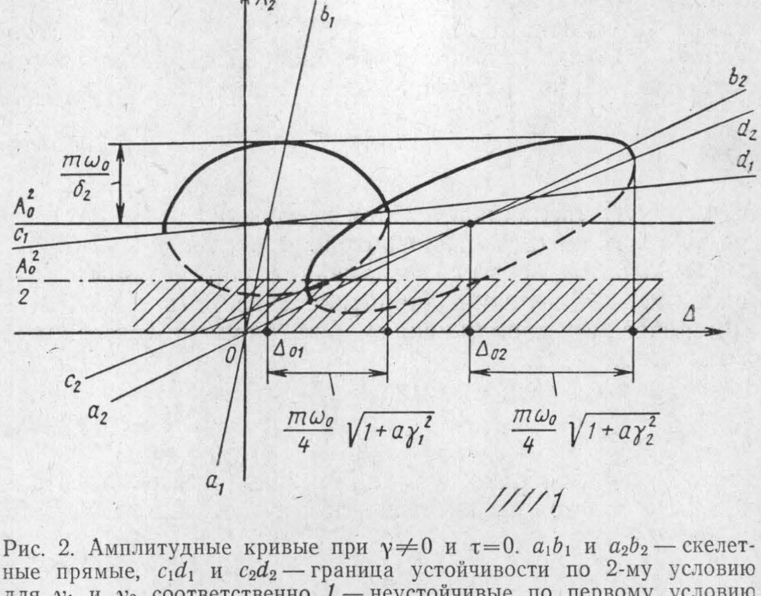

Рис. 2. Амплитудные кривые при $\gamma \neq 0$ и $\tau = 0$. a_1b_1 и a_2b_2 — скелетные прямые, c_1d_1 и c_2d_2 — граница устойчивости по 2-му условию для γ_1 и γ_2 соответственно. *1* — неустойчивые по первому условию устойчивости; $\gamma_2 > \gamma_1$

При изменении расстройки Δ от меньших значений к большим полоса

Рис. 3. Амплитудные кривые при $\gamma = 0$ и $\tau \neq 0$. Обозначения те же, что на рис. 2. Неустойчивые по первому условию устойчивости: *1* — для τ_1, *2* — для τ_2; $\tau_2 > \tau_1$

синхронизации зависит от γ и увеличивается с увеличением γ при $m = \text{const}$.

В случае $\gamma = 0$, $\tau \neq 0$ (8) перейдет в

$$\Delta = \pm \sqrt{\left(\frac{m\omega_0^2}{4p}\right)^2 - \left(\frac{\delta_{2\tau}}{4}\right)^2 (A^2 - A_{0\tau}^2)^2} -$$

$$- \frac{|M|}{2} \omega_0^2 \left(S_0 - \frac{1}{4} S_2 A^2\right) \sin p\tau. \qquad (24)$$

Амплитудное условие устойчивости будет иметь вид (11), а фазовое примет вид

$$\Delta < \frac{1}{4} \delta_{2\tau} \frac{1}{\operatorname{tg} p\tau} (A^2 - A_{0\tau}^2) - \frac{1}{2} |M| \omega_0^2 \sin p\tau \left(S_0 - \frac{1}{4} S_2 A^2\right). \qquad (25)$$

Значение квадрата максимальной амплитуды равно

$$A_{\max}^2 = A_{0\tau}^2 + \frac{m\omega_0}{\delta_{2\tau}}. \qquad (26)$$

На рис. 3 показаны две амплитудные кривые для случая $\sin p\tau > 0$. Одна амплитудная кривая построена при запаздывании близком к оптимальному (τ_1). В этом случае устойчивая часть амплитудной кривой отсекается фазовым условием устойчивости (25) в точках вертикальных касательных.

Другая амплитудная кривая построена при запаздывании далеком от оптимального (τ_2).

С увеличением пролетного угла $p\tau$ нелинейный коэффициент затухания $\delta_2\tau$ (см. (6)) уменьшается, что приводит к изменению отклика системы на параметрическое воздействие, при неизменном m амплитудная кривая вытягивается вдоль скелетной прямой:

$$\Delta' = \left(\frac{1}{8} |M| \omega_0^2 S_2 A^2 - \frac{1}{2} |M| \omega_0^2 S_0\right) \sin p\tau. \qquad (27)$$

Как видно из (26), разность $A_{\max}^2 - A_{0\tau}^2$ с уменьшением $\delta_2\tau$ увеличивается.

Из (6) и (9) следует, что с изменением запаздывания τ меняются коэффициенты линейного $\delta_0\tau$ и нелинейного $\delta_2\tau$ затухания, а также реактивный коэффициент нелинейности γ_τ. Вследствие наклона амплитудной кривой два условия устойчивости (11) и (26) так рассекают амплитудную кривую, что полоса синхронизации определяется неоднозначно при изменениях расстройки Δ от больших значений к меньшим и наоборот.

При пролетном угле 60—70° и при изменении расстройки Δ от меньших значений к большим ширина полосы синхронизации может быть в 2—3 раза больше, чем в случае отсутствия запаздывания.

При изменениях Δ от больших значений к меньшим полоса параметрической синхронизации будет в первом приближении такой же, как и в случае отсутствия запаздывания.

В автоколебательной системе, частота колебаний которой не зависит от амплитуды (автогенератор с линейным контуром или автогенератор с нелинейным контуром и компенсирующим запаздыванием $\gamma_п = \gamma - \gamma_\tau = 0$), ширина полосы параметрической синхронизации не зависит от параметров системы и равна полосе параметрического возмущения консервативной системы.

Максимальное приращение амплитуды ΔA_m в полосе параметрической синхронизации определяется глубиной модуляции параметра и нелинейным активным сопротивлением системы. Поэтому ΔA_m не зависит от сопротивления контура и от величины нелинейности реактивного параметра. В то же время, при изменении запаздывания τ изменяется и $\delta_2\tau$; при изменении запаздывания ΔA_m существенно меняется.

Для автогенератора с нелинейным контуром и запаздыванием в обратной связи ($\gamma \neq \gamma_\tau$) амплитудные кривые в области параметрической синхронизации имеют наклон, и ширина области существенно зависит от направления изменения расстройки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарантович А. С. «Изв. вузов», радиофизика, **11**, № 7, 1046—1052, 1968.
2. Постников Л. В., Тарантович А. С. «Изв. вузов», радиофизика, **13**, № 4, 568—577, 1970.
3. Исмайлов З. И., Рахимов Г. Р. ДАН УзССР, № 13, 13—16, 1968.
4. Иванов С. А. «Радиотехника и электроника», **15**, № 3, 624—627, 1970.
5. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
15.6 1971 г.

Кафедра
физики колебаний