

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1972

УДК 532.526.3

А. Н. БОДРОВ, Т. В. КУРГАНОВА, Ю. М. РОМАНОВСКИЙ

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ТОЛМИНА—ШЛИХТИНГА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Рассмотрена возможность параметрического возбуждения волн Толмина—Шлихтинга в пограничном слое при числах Рейнольдса, меньших критического. Получена зависимость этого числа от амплитуды возмущений в потоке.

Одной из классических задач гидродинамики является исследование устойчивости ламинарных течений при различных граничных условиях с начальными конечными возмущениями или при наличии возмущений во внешнем потоке.

Несмотря на многочисленные попытки учесть начальные конечные возмущения, различным авторам удалось получить лишь частные результаты. Так, авторы работ [1, 2 и 3] ищут нестационарные возмущения ламинарного профиля скоростей в виде ряда волн, распространяющихся вдоль канала. При этом им удалось получить нелинейные уравнения для «амплитуд» только нескольких членов этого ряда. В связи с этими работами следует указать на теорию Ландау [4], которая дает ясную физическую интерпретацию нелинейного взаимодействия возмущений. Упомянутые работы можно считать попытками конкретизировать вид коэффициентов в уравнениях Ландау. Интересны эксперименты, в которых учитываются трехмерные возмущения при исследовании устойчивости пограничного слоя [5].

В настоящей работе рассматривается влияние периодических возмущений скорости в пограничном слое на его устойчивость при числах Рейнольдса ( $Re$ ), близких к критическим.

### § 1. Вывод основных уравнений

Предположим, что пластинка обтекается параллельно ей «спокойным» потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью  $U_\infty$ . На определенном расстоянии от края пластинки ламинарный пограничный слой теряет устойчивость. При  $Re = Re^*$  возникают так называемые волны Толмина—Шлихтинга (ВТШ) [6], функция тока для которых представляется в виде

$$\psi(x, y, t) = [\varphi_r(y) \cos(\alpha x - \beta t) - \varphi(y) \sin(\alpha x - \beta t)]. \quad (1)$$

Скорости  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$ , получающиеся путем дифференцирования  $\psi(x, y, t)$ :

$$u(x, y, t) = \partial\psi/\partial y \text{ и } v(x, y, t) = -\partial\psi/\partial x \quad (2)$$

являются «возмущениями» в направлениях  $x$  (вдоль пластинки) и  $y$  (перпендикулярно пластинке) для ламинарного профиля скоростей  $U_0(y)$ . Как видно из формулы (1), ВТШ имеют частоту  $\beta$  и распространяются вдоль пластинки с некоторой скоростью  $c$ :

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i = \frac{\beta_r + i\beta_i}{\alpha} \quad (3)$$

где  $\beta_r$  — фазовая скорость распространения колебаний,  $c_i$  — величина позволяющая судить о затухании или нарастании колебаний. Она зависит от  $Re$  и  $\alpha$ . Если

$$c_i(\alpha, Re) = 0, \quad (4)$$

ВТШ являются незатухающими. Кривая (4) отделяет на плоскостях  $(Re, \alpha)$  и  $(Re, \beta)$  области устойчивости от областей неустойчивости (рис. 1). Важно отметить, что при  $Re = Re^*$  и  $\alpha = \alpha^*$  (на самом «носике» границы устойчивости) возникает лишь одно-единственное одночастотное колебание с фиксированной частотой  $f^* = \beta^*/2\pi$  и длиной

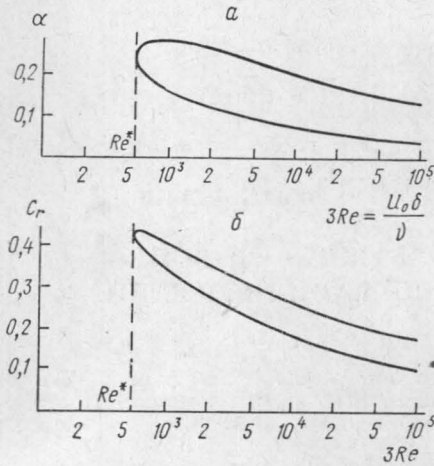


Рис. 1. Границы области устойчивости для волны Толмина—Шлихтинга

волны  $2\pi/\alpha^* = \lambda^*$ . Иными словами, в точке  $Re^*, \alpha^*$  выполняются условия генерации лишь одной синусоидальной волны. Следовательно, механизм образования этой «первой» волны обеспечивается неким одночастотным «автогенератором» с мягким возбуждением. Если рассмотреть точки на плоскости  $(Re, \alpha)$  и  $(Re, \beta)$  с координатами  $\alpha^*, Re; \beta^*(Re < Re^*)$ , то при малых разностях  $Re^* - Re$  в таких точках мы имеем дело с «недовозбужденной» одночастотной колебательной системой.

Можно предположить, что если на основном ламинарном течении  $U_0(y)$  в пограничном слое наложено некоторое конечное периодическое возмущение  $\psi_1(x, y, t)$ , то при определенном виде этой функции в «недовозбужденной» системе могут возникнуть ВТШ. При очень малых периодических возмущениях ламинарный профиль «пульсирует» и остается устойчивым.

Суммарная функция тока в пограничном слое  $\psi(x, y, t)$ , вообще говоря, удовлетворяет уравнениям Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi = 0, \quad (5)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Функция  $\psi$  может быть представлена в виде

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y) + \varepsilon_1 \psi_1(x, y, t) + \varepsilon_2 \psi_2(x, y, t). \quad (6)$$

Здесь  $\psi_2(x, y, t)$  — ВТШ, а  $\psi_1(x, y, t)$  — искомое нами периодическое возмущение, возникающее благодаря пульсациям скорости во внешнем потоке. Величина  $\varepsilon_1$  может быть порядка единицы, а  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ .

Пусть движение  $\psi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \varepsilon_1 \psi_1(x, y, t)$  устойчиво, тогда

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \varepsilon_1^2 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \varepsilon_1 \nu \Delta \Delta \psi_1 +$$

$$+ \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Для отыскания уравнения, описывающего малые возмущения  $\psi_2(x, y, t)$ , подставляем (6) в (5). Тогда, пренебрегая членами порядка  $\varepsilon_2^2$  и учитывая (7), получим

$$\frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial t} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_2 + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial y} -$$

$$- \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) и нижеследующие приведены к безразмерному виду. За масштаб длины взята толщина пограничного слоя  $\delta$ , а масштаб скорости —  $U_\infty$ .

Если форма профиля скоростей  $U_0(y) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}$  и вид функции  $\psi_1(x, y, t)$  задан, то уравнение (8) вместе с краевыми условиями для  $\psi_2(x, y, t)$  может служить для отыскания критерия нарастания функции  $\psi_2(x, y, t)$ . Однако нас интересует другая «сопряженная» задача. Сформулируем ее.

Пусть течение таково, что  $\text{Re} < \text{Re}^*$ . Какую величину и форму необходимо задать для возмущения профиля  $\varepsilon_1 \psi_1(x, y, t)$ , чтобы возбудить в потоке незатухающие ВТШ?

Итак, нам известно, что  $\psi_2(x, y, t)$  имеет вид (1) и удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi_2 - \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}^*} \Delta \Delta \psi_2, \quad (9)$$

а функция  $\varphi(y) = \varphi_r(y) + i\varphi_i(y)$  является решением уравнения Орра—Зоммерфельда [6] в точке  $\alpha^*$ ,  $\text{Re}^*$ :

$$(U_0 - c)(\varphi'' - \alpha^{*2}\varphi) - U_0''\varphi = -\frac{1}{\alpha^* \text{Re}^*} (\varphi'''' - 2\alpha^{*2}\varphi'' + \alpha^{*4}\varphi) \quad (10)$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$\varphi_r(0) = \varphi_i(0) = \varphi_r'(0) = \varphi_i'(0) = 0,$$

$$\varphi_r'(1) + \alpha^* \varphi_r(1) = 0, \quad \varphi_i'(1) + \alpha^* \varphi_i(1) = 0. \quad (11)$$

Добавим к уравнению (8) член  $(1/\text{Re}^*) \Delta \Delta \psi_2$  и вычтем его. Учтем, что  $\psi_2$  удовлетворяет уравнению (9). Благодаря этому (8) сильно упрощается:

$$\frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{\text{Re}} - \frac{1}{\text{Re}^*} \right) \Delta \Delta \psi_2. \quad (12)$$

Заметим, что (12) является линейным уравнением с известными периодически меняющимися коэффициентами:

$$\frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \Delta \Delta \psi_2.$$

Поэтому задача об отыскании функции  $\psi_1(x, y, t)$  и исследовании ее поведения является параметрической задачей. Естественно предположить, что колебания на собственной частоте, имеющие собственную форму  $\varphi_r(y)$ ,  $\varphi_i(y)$  в «недовозбужденной» колебательной системе (точка  $\text{Re}^{**} \leq \text{Re}^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\alpha^*$ ), легче всего возбуждятся, если  $\psi_1(x, y, t)$  будут иметь вид, аналогичный (1):

$$\psi_1(x, y, t) = f_1(y) \cos \sigma(\alpha^*x - \beta^*t) + f_2(y) \sin \sigma(\alpha^*x - \beta^*t). \quad (13)$$

Наиболее опасны в смысле возбуждения колебаний на частоте  $\beta^*$  параметрические воздействия на удвоенной частоте. Это значит, что в (13)  $\sigma=2$ . При этом остаются неопределенными наиболее опасные формы  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$  и параметр  $\varepsilon_1$  для различных  $\text{Re} < \text{Re}^*$ . Чтобы найти эти функции, выражения (1) и (13) следует подставить в уравнение (12). После этого в (12) нужно выделить коэффициенты при  $\sin(\alpha^*x - \beta^*t)$  и  $\cos(\alpha^*x - \beta^*t)$ .

Другие члены уравнения (12) с комбинационными фазами  $3(\alpha^*x - \beta^*t)$  не будут играть существенной роли и их можно отбросить так же, как это делается при рассмотрении колебаний в контуре на основном параметрическом резонансе. Собрать коэффициенты при синусе и косинусе, можно образовать следующую систему неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} f_1'' &= a_0 \tilde{\varepsilon} - a_1' f_1'' - a_2 f_2'' - a_3 f_1' - a_4 f_1 - a_5 f_2, \\ f_2'' &= b_0 \tilde{\varepsilon} + b_1 f_1'' - b_2 f_2'' + b_2 f_1' - b_4 f_1 - b_5 f_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  являются функциями  $y$  и выражаются через комбинации «амплитуд» ВТШ  $\varphi_r$  и  $\varphi_i$  и их производных. Параметр  $\tilde{\varepsilon}$  равен

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{\text{Re}} - \frac{1}{\text{Re}^*} \right). \quad (15)$$

Функции  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  удовлетворяют граничным условиям, аналогичным условиям (11):

$$\begin{aligned} f_1(0) = f_2(0) = f_1'(0) = f_2'(0) &= 0, \\ f_1'(1) + 2\alpha^* f_2(1) &= 0, \\ f_2'(1) + 2\alpha^* f_2(1) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

## § 2. Обсуждение результатов расчета

Необходимые для образования коэффициентов  $a_i(y)$  и  $b_i(y)$  функции  $\varphi_r(y)$  и  $\varphi_i(y)$  и их производные находились с помощью решения уравнения (10) в точке  $\alpha^*$ ,  $\text{Re}^*$ . Само по себе решение уравнения Орра—Зоммерфельда было достаточно сложной задачей из-за наличия у этого уравнения быстро расходящихся частных решений. Поэтому задачу пришлось решать с помощью специального метода Годунова на цифровой быстродействующей машине (метод прогонки с перенормировками) [7]. Полученные графики функции  $\varphi_r(y)$ ,  $\varphi_i(y)$  приведены на рис. 2, соответственно  $\alpha^*=0,665$ ,  $\text{Re}^*=1660$  и  $c_r=0,415$ . Вычисление  $\varphi_r(y)$  и  $\varphi_i(y)$  было облегчено тем, что величины критических параметров брались из [6].



Система уравнений (14) в свою очередь решалась на цифровой машине. Результаты этого решения представлены на рис. 3. Вычисление  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  было затруднено, так как коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  в системе (14) при  $y \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности. Поэтому выполнение граничных условий (16) мы требовали не при  $y=0$ , а при малом  $y_1=0,002$ , там, где  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f'_1$ ,  $f'_2$  еще достаточно малы, а коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$

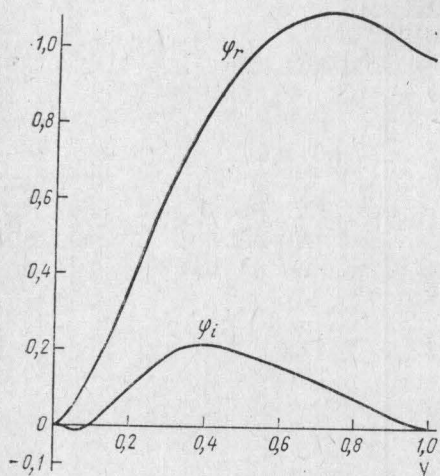


Рис. 2. Собственные функции уравнения Орра—Зоммерфельда

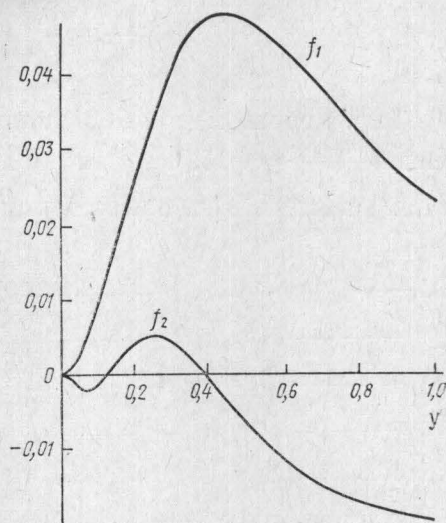


Рис. 3. Формы распределения амплитуд для наиболее опасных возмущений

имеют довольно большие, но конечные значения. Полученные формы  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  являются наиболее «опасными» функциями распределения амплитуд «внешнего» воздействия. На рис. 4 представлены «мгновенные» фотографии возмущенного профиля скоростей в фиксированной точке в последовательные моменты времени  $t=t_1$  (а),  $t=t_1+T/4$  (б),  $t=t_1+T/2$  (в),  $t=t_1+3T/4$  (г) (период  $T=2\pi/2\beta^*$ ). Дополнительные расчеты показывают, что распределение амплитуд колебательного возмущения профиля, подобное «наиболее опасному», можно получить в случае, когда в пространстве над плоскостью вдоль направления  $x$  распространяется плоская волна возмущения скорости с частотами порядка  $2\beta^*$  и соответствующими длинами волн.

Одновременно с формами  $f_1(1)$  и  $f(y)$  были получены зависимости величины  $Re^{**}$  от параметра  $\epsilon_1$ . Эта зависимость представлена на рис. 5. Она показывает, как уменьшается критическое число  $Re^{**} < Re^*$  в зависимости от величины «амплитуды»  $\epsilon_1$  в наиболее опасном случае. Из рисунка видно, для того, чтобы  $Re^{**}$  снизилась на 7% от величины  $Re^*$ , соответствующей невозмущенному потоку, необходимо  $\epsilon_1$  взять равным единице. Приведем оценку наиболее опасных частот и длин волн внешних возмущений. Как мы уже говорили, такая частота равна удвоенной частоте внешних воздействий. Так как (см. рис. 1) безразмерные  $\beta^*=0,26$ , а  $\alpha^*=0,665$ , то соответствующие этим удвоенные величины равны  $2\beta^*=0,52$  и  $2\alpha^*=1,3$ . Приведем, например, численные значения критических параметров в случае обтекания пластинки потоком воды ( $U=5$  м/сек,  $\nu=1,3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек):  $\delta=5 \cdot 10^{-2}$  см,  $\beta^*/2\pi=800$  гц,  $2\lambda^*=$

$= 0,24$  см. При фиксированной величине  $Re^{**}$  с увеличением скорости потока частота  $2\beta^*$  растет пропорционально  $U_\infty^2$ , а  $2\lambda^* \sim \frac{1}{U_\infty}$ .

Вернемся к обсуждению порядка величин амплитуд наиболее опасных колебаний. Для их оценки необходимо  $\varepsilon_1$  умножить на величину амплитуды скорости  $|u|_{\max} \approx \varepsilon_1 \left| \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{\max} U_\infty$ . Из расчета следует, что

$$\frac{|u|_{\max}}{U_\infty} \approx \varepsilon_1 \left| \frac{\partial f_1'}{\partial y} \right|_{\max} \approx \varepsilon_1 \cdot 0,15. \quad (17)$$

Таким образом, при  $Re^{**}$ , мало отличающихся от  $Re^*$  ( $\varepsilon_1 = 1$ ), отношение  $\frac{|u|_{\max}}{U_\infty} = 0,15$ , т. е. для параметрического возбуждения слоя необходимо наложить на профиль стационарного обтекания довольно большое по величине пульсирующее возмущение скорости. Укажем ряд причин, могущих привести к возбуждению ВТШ.

большое по величине пульсирующее возмущение скорости. Укажем ряд причин, могущих привести к возбуждению ВТШ.

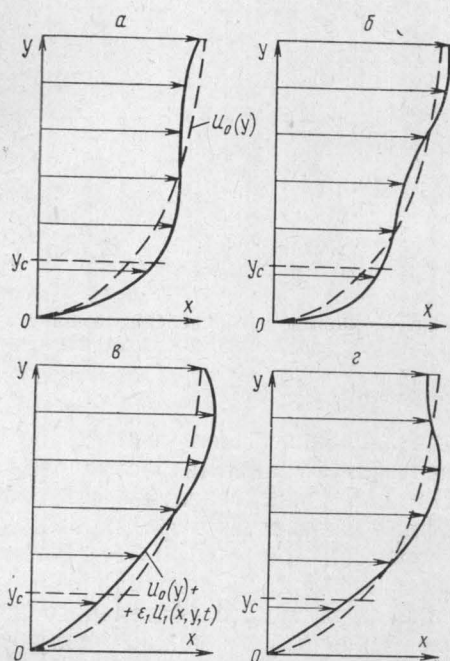


Рис. 4. «Мгновенные» фотографии возмущенного профиля в последовательные моменты времени

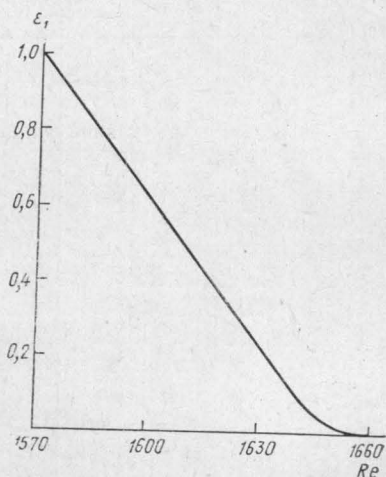


Рис. 5. Зависимость параметра  $\varepsilon_1$  от числа  $Re$

Большие по величине периодические возмущения ламинарного профиля могут быть созданы цепочкой вихрей (дорожкой Кармана), движущихся над плоскостью вне пограничного слоя, или с помощью колебаний узкой ленты, помещенной в самом пограничном слое [6].

Турбулентные возмущения, всегда имеющиеся в набегающих потоках, вызывают случайную параметрическую модуляцию ламинарного профиля, которая может в принципе привести к потери устойчивости в рассматриваемой одночастотной недовозбужденной колебательной системе [8]. При этом важно, чтобы спектральная плотность возмущений на удвоенной частоте ВТШ имела бы заметную величину.

Расчеты показывают, что даже мощная звуковая волна, распространяющаяся над плоскостью, не окажет сколько-нибудь заметного влияния на параметрическую устойчивость слоя.

В заключение отметим, что малая эффективность параметрического воздействия на пограничный слой над плоской пластиной объясняется малой добротностью одночастотной колебательной системы. Однако модуляция профиля пограничного слоя является своеобразной «параметрической накачкой», которая может обеспечить усиление возмущений на определенных частотах, подобно тому, как это происходит в контуре с флуктуирующей собственной частотой. С другой стороны, пограничные слои на изогнутых поверхностях могут порождать одночастотные колебательные системы с большей добротностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stuart J. J. Fl. Mech. **9**, 3, 1960.
2. Watson J. J. Fl. Mech., **9**, 3, 1960.
3. Рейнольдс У., Поттер М. Сб. «Механика», т. 2, 1968, стр. 108.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
5. Klebanoff P. S., Tidsrom K. D., Sargent L. M. J. Fl. Mech., **12**, 1—34, 1962.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
7. Годунов С. К. «Журн. вычислительной математики и математической физики», **2** (5), 1962.
8. Иванов С. А., Романовский Ю. М. «Радиотехника и электроника», **8**, 8, 1397, 1967.

Поступила в редакцию  
22.7 1971 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата