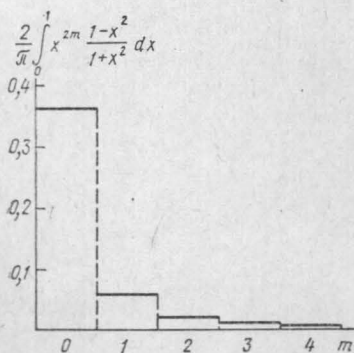


И. К. КОСТИН, Ю. М. РОМАНОВСКИЙ

ФЛУКТУАЦИИ В СИСТЕМАХ МНОГИХ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Рассмотрены системы большого числа автогенераторов, связанных через проводимость в кольцо и в цепочку. В линейном приближении найдены дисперсии разностей фаз генераторов при наличии шума как во всех, так и в каком-либо одном из автогенераторов.

Изучение периодических процессов в биохимии приводит к необходимости исследовать системы большого числа связанных между собой автогенераторов: эти системы моделируют взаимодействие отдельных объемов или клеток, в которых идут автоколебательные химические реакции [1, 2]. Влияние шума на такие системы до сих пор не учитывалось, хотя присутствие шума в химических системах является принципиально необходимым (в частности, благодаря тепловым флуктуациям концентраций). Относительные флуктуации числа молекул в реакторе, вызванные тепловым движением, имеют, как известно, порядок $1/\sqrt{N}$, где N — число реагирующих молекул. Они пренебрежимо малы в обычных химических системах, где $N \sim 10^{23}$, однако в биохимических системах, где $N \sim 10^3$, величина относительных флуктуаций составляет несколько



процентов и оказывает заметное влияние на поведение системы. В химических системах с большим числом взаимодействующих молекул значительный шум обусловлен турбулентными пульсациями.

В настоящей работе изучается влияние шума на процессы синхронизации в цепочке из произвольного числа автогенераторов, рассмотренной в [3], а также аналогичная система генераторов, замкнутая в кольцо. Известно много работ, посвященных исследованию флуктуаций фаз синхронизованных автогенераторов (например [4]), однако их авторы ограничиваются разбором небольшого числа связанных генераторов. Лишь в недавнем обзоре [5] упоминается работа «О ширине

спектральной линии системы N взаимно синхронизованных генераторов» [6].

Кроме случая, когда мощности шумов в каждом из генераторов системы одинаковы, в настоящей работе рассматриваются флуктуации фазы при наличии шума лишь в каком-либо одном из генераторов. Такое рассмотрение позволяет получить более детальную информацию о процессах распространения влияния шума в системе, полезную в биологических приложениях.

§ 1. Постановка задачи

Изучим цепочку из M одинаковых автогенераторов, описываемую системой уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 x_0^2) \dot{x}_0 + \alpha(x_1 - \dot{x}_0) + \xi_0, \\ \ddot{x}_k + \omega^2 x_k &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 x_k^2) \dot{x}_k + \alpha(\dot{x}_{k-1} - 2\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1}) + \xi_k, \\ \ddot{x}_{M-1} + \omega^2 x_{M-1} &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 x_{M-1}^2) \dot{x}_{M-1} + \alpha(\dot{x}_{M-2} - \dot{x}_{M-1}) + \xi_{M-1}, \\ k &= 1, 2, \dots, M-2; \langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} N \delta(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь δ и α — малые параметры. Решение системы (1) будем искать в виде

$$x_i = A_i(t) \cos(\omega t + \varphi_i(t)), \quad \dot{x}_i = -\omega A_i(t) \sin(\omega t + \varphi_i(t)),$$

где $A_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Пользуясь методом § 13 книги [7], получим систему укороченных уравнений для амплитуд $A_i(t)$ и фаз $\varphi_i(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 &= \delta A_0 - \frac{\delta \varepsilon^2 A_0^3}{4} - \frac{\alpha A_0}{2} + \frac{\alpha A_1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{N}{4\omega^2 A_0} + \frac{1}{\omega} \eta_0, \\ \dot{A}_k &= \delta A_k - \frac{\delta \varepsilon^2 A_k^3}{4} - \frac{\alpha A_k}{2} + \frac{\alpha A_{k-1}}{2} \cos(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \\ &+ \frac{\alpha A_{k+1}}{2} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \frac{N}{4\omega^2 A_k} + \frac{1}{\omega} \eta_k, \\ \dot{A}_{M-1} &= \delta A_{M-1} - \frac{\delta \varepsilon^2 A_{M-1}^3}{4} - \frac{\alpha A_{M-1}}{2} + \frac{\alpha A_{M-2}}{2} \cos(\varphi_{M-2} - \varphi_{M-1}) + \\ &+ \frac{N}{4\omega^2 A_{M-1}} + \frac{1}{\omega} \eta_{M-1}, \\ \dot{\varphi}_0 &= \frac{\alpha A_1}{2A_0} \sin(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{\omega A_0} \xi_0, \\ \dot{\varphi}_k &= \frac{\alpha A_{k+1}}{2A_k} \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \frac{\alpha A_{k-1}}{2A_k} \sin(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \frac{1}{\omega A_k} \xi_k, \\ \dot{\varphi}_{M-1} &= \frac{\alpha A_{M-2}}{2A_{M-1}} \sin(\varphi_{M-2} - \varphi_{M-1}) + \frac{1}{\omega A_{M-1}} \xi_{M-1}, \\ k &= 1, 2, \dots, M-2; \langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} \frac{N}{2} \delta(\tau), \\ \langle \eta_i(t) \eta_j(t + \tau) \rangle &= \delta_{ij} \frac{N}{2} \delta(\tau), \quad \langle \xi_i(t) \eta_j(t + \tau) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В отсутствие шума амплитуды A_i имеют определенные стационарные значения \bar{A}_i , которые с точностью до коэффициентов связи α равны $\bar{A}_i = 2/\epsilon$. Стационарными значениями разностей фаз являются, очевидно, $(\varphi_1 - \varphi_0) = (\varphi_2 - \varphi_1) = \dots = (\varphi_{M-1} - \varphi_{M-2}) = 0$.

Линеаризуя уравнения (2) в окрестности стационарных значений и пренебрегая членами вида Na_i и αa_i , где $a_i = A_i - \bar{A}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -2\delta a_i + \frac{1}{\omega} \eta_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-1; \\ \dot{\varphi}_0 &= \frac{\alpha}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{\omega \bar{A}} \xi_0; \\ \dot{\varphi}_k &= \frac{\alpha}{2} (\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}) + \frac{1}{\omega \bar{A}} \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, M-2; \\ \dot{\varphi}_{M-1} &= \frac{\alpha}{2} (\varphi_{M-2} - \varphi_{M-1}) + \frac{1}{\omega \bar{A}} \xi_{M-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из вида линеаризованных уравнений ясно усматривается статистическая независимость амплитудных и фазовых флуктуаций. Из (3) вытекает $\langle a_i a_j \rangle = \frac{N}{8\delta\omega^2} \delta_{ij}$. В дальнейшем изучаются лишь фазовые флуктуации.

§ 2. Вычисление дисперсий разностей фаз связанных автогенераторов

Уравнения фазовых флуктуаций (3) могут быть записаны в виде

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\alpha}{4} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \frac{1}{\omega \bar{A}} \xi_i, \quad (4)$$

где

$$U = (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \dots + (\varphi_{M-1} - \varphi_{M-2})^2. \quad (5)$$

Мы изучим также фазовые флуктуации в «кольце» автогенераторов. Система уравнений, описывающая кольцо, отличается от (1) лишь крайними уравнениями. В этом случае

$$U = (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \dots + (\varphi_{M-1} - \varphi_{M-2})^2 + (\varphi_0 - \varphi_{M-1})^2. \quad (6)$$

Решая уравнение Фоккера—Планка, соответствующее флуктуационным уравнениям (4), можно найти стационарную плотность распределения [7]:

$$\omega_{\text{ст}}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{M-1}) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{\alpha\omega^2 \bar{A}^2}{N} U \right\}. \quad (7)$$

Мы будем рассматривать лишь разности фаз генераторов, поэтому можно положить $\varphi_0 = 0$. Из сопоставления выражений (5) и (7) видно, что разности фаз отдельных звеньев цепочки некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии

$$\langle (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2}. \quad (8)$$

Для вычисления дисперсий разностей фаз генераторов, замкнутых в кольцо, необходимо найти матрицу, обратную матрице квадратичной формы $U = a_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta$, где

$$\|a_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Используя результат $\det \|a_{\alpha\beta}\| = M$, нетрудно найти диагональные элементы матрицы $\|k_{\alpha\beta}\| = \|a_{\alpha\beta}\|^{-1}$, определяющие дисперсии разностей фаз генераторов:

$$\langle(\varphi_k - \varphi_0)^2\rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \cdot \frac{k(M-k)}{M}. \quad (9)$$

Формула (9) совпадает с соответствующей формулой для цепочки генераторов (8), если число генераторов велико, т. е. при $M \rightarrow \infty$. Поскольку $k_{\alpha\beta} = \langle(\varphi_\alpha - \varphi_0)(\varphi_\beta - \varphi_0)\rangle$ можно с учетом кольцевой симметрии задачи получить $2k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\alpha} + k_{\beta\beta} - k_{|\alpha-\beta|, |\alpha-\beta|}$, т. е. выразить недиагональные элементы $\|k_{\alpha\beta}\|$ через диагональные и, таким образом, полностью решить задачу обращения матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$.

§ 3. Фазовые флуктуации при неодинаковых частотах и интенсивностях шумов

Результаты § 2 нетрудно обобщить на случай, когда собственные частоты генераторов имеют небольшой разброс около центральной частоты ω_0 внутри полосы синхронизации, т. е. если $\omega_i = \omega_0 + \nu_i$, причем для упрощения формул примем $\nu_0 + \dots + \nu_{M-1} = 0$. Тогда вместо функции U , заданной формулой (5), в уравнение (4) следует подставлять функцию

$$U^* = U + \frac{1}{4\alpha} (\nu_0\varphi_0 + \nu_1\varphi_1 + \dots + \nu_{M-1}\varphi_{M-1}). \quad (10)$$

В этом случае вместо (8) получим

$$\langle(\varphi_k - \varphi_{k-1})^2\rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \left(1 + 2\left(\frac{\nu_0 + \dots + \nu_{k-1}}{\alpha}\right)^2\right). \quad (11)$$

Из (11) видно, что расстройки генераторов по частоте могут в общем случае увеличить интенсивность фазовых флуктуаций, однако, если в цепочке можно выделить группу генераторов, такую, что их расстройки в сумме равны нулю, то флуктуации разностей фаз усилятся внутри такой группы и не изменятся за ее пределами. В частности, если расстроены по частоте лишь два соседних генератора $\nu_k = -\nu_{k+1} \neq 0$, то увеличится лишь $\langle(\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2\rangle$, а в других звеньях цепочки флуктуации разностей фаз останутся без изменений.

Менее тривиальным обобщением результатов § 2 является описание фазовых флуктуаций в том случае, когда интенсивности шумов, возникающих в генераторах, различны и, в частности, если шумящим является лишь один генератор.

Рассмотрим систему уравнений (4), в которой

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{M-1} = 0, \quad \xi_0 = \xi, \quad \langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = \frac{N}{2} \delta(\tau). \quad (12)$$

Будем считать M четным числом. Тогда $\varphi_n(t)$ можно представить в виде

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} \left(a_k(t) \cos \frac{2\pi kn}{M} + b_k(t) \sin \frac{2\pi kn}{M} \right) + \frac{a_{M/2}(t)}{2} \cos \pi n, \quad (13)$$

где

$$a_r(t) = \frac{2}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \varphi_n(t) \cos \frac{2\pi rn}{M}, \quad b_s(t) = \frac{2}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \varphi_n(t) \sin \frac{2\pi sn}{M}. \quad (14)$$

Подобным образом представим

$$\xi_n(t) = \frac{p_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} p_k(t) \cos \frac{2\pi kn}{M} + \frac{p_{M/2}(t)}{2} \cos \pi n. \quad (15)$$

С учетом (12) $p_k(t) = \frac{2}{M} \xi(t)$ при всех k . Подставляя (13) и (15) в (4) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi k(n-1)}{M} - 2\cos \frac{2\pi kn}{M} + \cos \frac{2\pi k(n+1)}{M} &= -4\sin^2 \frac{\pi k}{M} \cos \frac{2\pi kn}{M}, \\ \sin \frac{2\pi k(n-1)}{M} - 2\sin \frac{2\pi kn}{M} + \sin \frac{2\pi k(n+1)}{M} &= -4\sin^2 \frac{\pi k}{M} \sin \frac{2\pi kn}{M}, \end{aligned}$$

получим систему флуктуационных уравнений для $a_k(t)$ и $b_k(t)$:

$$\dot{a}_k + 2\alpha \sin^2 \frac{\pi k}{M} a_k = \frac{2}{M\omega A} \xi, \quad \dot{b}_k + 2\alpha \sin^2 \frac{\pi k}{M} b_k = 0. \quad (16)$$

Из этой системы следует (кроме $k=l=0$), что

$$\langle a_k a_l \rangle = \frac{N}{M^2 \alpha \omega^2 A^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{M} + \sin^2 \frac{\pi l}{M}}, \quad \langle b_k b_l \rangle = 0. \quad (17)$$

Используя (17), найдем

$$\begin{aligned} \langle (\varphi_n - \varphi_m)^2 \rangle &= \frac{N}{M^2 \alpha \omega^2 A^2} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{l=1}^{\frac{M}{2}-1} \times \\ &\times \frac{\left(\cos \frac{2\pi ln}{M} - \cos \frac{2\pi lm}{M} \right) \left(\cos \frac{2\pi kn}{M} - \cos \frac{2\pi km}{M} \right)}{\sin^2 \frac{\pi k}{M} + \sin^2 \frac{\pi l}{M}}. \end{aligned} \quad (18)$$

При больших M сумма в (18) может быть приближенно заменена интегралом. Получим

$$\langle (\varphi_n - \varphi_m)^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha \omega^2 A^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\cos nx - \cos mx)(\cos ny - \cos my)}{2 - \cos x - \cos y} dx dy.$$

Представляя

$$\frac{1}{2 - \cos x - \cos y} = \int_0^{\infty} e^{-z(2 - \cos x - \cos y)} dz$$

и изменяя порядок интегрирований, найдем ([8], стр. 201):

$$\langle (\varphi'_n - \varphi_m)^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \int_0^{\infty} (I_n(z) - I_m(z))^2 e^{-2z} dz. \quad (19)$$

Результат (19) можно также получить, рассматривая систему большого числа генераторов, соединенных в цепочку. При этом приходится вместо дискретного преобразования Фурье пользоваться дискретным преобразованием Лапласа. При большом числе автогенераторов закономерности распространения влияния шума отдельного генератора получаются одинаковыми как для кольца, так и для цепочки генераторов.

Интеграл в (19) допускает дальнейшее упрощение. Для этого воспользуемся формулами из [8], стр. 484 и [9]:

$$I_k(z) I_l(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} I_{k+l}(2z \cos \vartheta) \cos(k-l)\vartheta d\vartheta,$$

$$\int_0^{\infty} I_\nu(pt) e^{-pt} dt = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \left(\frac{\alpha}{p + \sqrt{p^2 - \alpha^2}} \right)^\nu.$$

Изменяя порядок интегрирований, получим после вычисления внутреннего интеграла

$$\langle (\varphi'_n - \varphi_m)^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\sin \vartheta} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \right)^{2n} - 2\cos(n-m)\vartheta \left(\frac{\cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \right)^{n+m} + \left(\frac{\cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \right)^{2m} \right] d\vartheta.$$

Положим $n = m + 1$, тогда

$$\langle (\varphi'_{m+1} - \varphi_m)^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \right)^{2m} \times$$

$$\times \frac{\sin \vartheta}{1 + \sin \vartheta} d\vartheta = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \frac{2}{\pi} \int_0^1 x^{2m} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx. \quad (20)$$

График зависимости интеграла (20) от числа m изображен на рисунке. Эта зависимость определяет закон убывания флуктуаций разностей фаз соседних генераторов по мере удаления от шумящего генератора. Из графика видно, что шум отдельного генератора может влиять на синхронизацию не более 3—4 соседних генераторов.

Мы предполагаем, что шумы, возникающие в отдельных генераторах, статистически независимы друг от друга. Поэтому в рассматриваемом нами линейном приближении средний квадрат флуктуаций раз-

ностей фаз любых двух генераторов складывается из средних квадратов флуктуаций, вызванных шумами в отдельных генераторах. Поскольку флуктуации, вызванные шумами одинаковой интенсивности, рассчитаны нами в § 2, ясно, что результаты (19) и (20) дают поправки к средним квадратам флуктуаций, вычисленным в § 2, если в качестве N брать $N_k - N_0$, т. е. отклонение мощности шума k -го генератора от общего для всех генераторов уровня N_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Колебательные процессы в биологических и химических системах». М., «Наука», 1967.
2. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Что такое математическая биофизика. М., «Просвещение», 1971.
3. Малафеев В. М., Полякова М. С., Романовский Ю. М. «Изв. вузов», радиофизика, **13**, № 6, 936, 1970.
4. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., «Наука», 1968.
5. Клибанова И. М., Малахов А. Н., Мальцев А. А. «Изв. вузов», радиофизика, **14**, № 2, 173, 1971.
6. Малахов А. Н., Мальцев А. А. ДАН СССР, **196**, 1065, 1971.
7. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., Физматгиз, 1949.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
22.7 1971 г.

Кафедра
общей физики для мехмата