Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1972

УДК 539:12

В. А. ЖЕЛНОРОВИЧ

СПИНОРНОЕ ПОЛЕ КАК СЛИЯНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Установлена полная система скалярных и тензорных характеристик для двух спиноров в пространстве Минковского. Получена эквивалентная тензорная запись уравнений Дирака и уравнений Паули—Янга—Ли. Полученные тензорные дифференциальные уравнения линейны. Показано, что поле, описываемое уравнениями Дирака, можно рассматривать как слияние различных комплексных скалярных векторных, псевдовекторных и псевдоскалярных волновых полей.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидовое пространство R_4, индекса один (пространство Минковского), отнесенное к ортонормированному базису. Пусть γ_α $(\alpha=1,2,3,4)$ — инвариантные спинтензоры в R_4, представляемые четырехмерными матрицами $\gamma_{\alpha B}^{A}$, определяемые соотношениями

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} I, \tag{1}$$

где I — единичная четырехмерная матрица, $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора пространства R_4 ($g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$) и пусть $E = \| e_{AB} \|$ — метрический спинор в R_4, ковариантные компоненты e_{AB} которого удовлетворяют равенству $E\gamma_\alpha E^{-1} = -\gamma_\alpha^T$, $\det E = 1$ (T — символ транспонирования).

Для любого спинора второго ранга Ψ в пространстве R_4 определяемого контрвариантными компонентами Ψ^{AB}, можно написать [1]

$$\psi^{AB} = \frac{1}{4}\left(-Fe^{AB} + iF^\alpha \gamma_\alpha^{AB} - \frac{i}{2} F^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{AB} + \overset{*}{F}{}^\alpha \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^{AB} - \overset{*}{F} \gamma^{5AB}\right). \tag{2}$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$,

$$\| e^{AB} \| = \| e_{AB} \|^{-1},\ \| \gamma_\alpha^{AB} \| = \gamma_\alpha E^T,\ \| \gamma_{\alpha\beta}^{AB} \| = \frac{1}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) E^T,$$

$$\| \overset{*}{\gamma}{}_\alpha^{AB} \| = -\frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\eta,\ \| \gamma^{5AB} \| = -\frac{1}{24} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta} \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\eta E^T,$$

[1] Общий спинорно-тензорный анализ в приложении к физическим задачам можно найти в [6, 9]. Изложение теории тензорных полей как слияния спинорных полей см. в [7, 8].

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}$ — компоненты единичного антисимметрического по всем индексам псевдотензора Леви — Чивита, $\varepsilon_{1234}=-\varepsilon^{1234}=+1$.

Тензорные F определяются следующим образом:

$$F=e_{AB}\psi^{AB},\ F^{\alpha}=i\gamma^{\alpha}_{AB}\psi^{AB},\ F^{\alpha\beta}=i\gamma^{\alpha\beta}_{AB}\psi^{AB},$$

(3)

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha}=\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{AB}\psi^{AB},\quad \overset{*}{F}=\overset{5}{\gamma}_{AB}\psi^{AB}.$$

Спинорные индексы у спинтензоров γ опускаются при помощи метрического спинора E так, что $\gamma^{\alpha}_{AB}=g^{\alpha\beta}e_{AC}e_{BD}\gamma^{CD}_{\beta}$. Из формул (2) и (3) следует, что произвольный спинор второго ранга $\Psi=\|\psi^{AB}\|$ в пространстве Минковского эквивалентен тензорному агрегату

$$F=\{F,\ F^{\alpha},\ F^{\alpha\beta},\ \overset{*}{F}{}^{\alpha},\ \overset{*}{F}\}.$$

Если компоненты ψ^{AB} представляются в виде произведения $\psi^{AB}=\chi^{A}\psi^{B}$, где контрвариантные компоненты χ^{A}, ψ^{B} определяют два спинора первого ранга в R_4, то можно написать равенства

$$\psi^{AB}\psi^{CD}=\psi^{AD}\psi^{CB}, \tag{4}$$

среди которых имеется девять независимых соотношений. Если $\psi^{AA}\neq 0$, то в качестве независимых соотношений в (4) можно взять следующие соотношения:

$$\psi^{AA}\psi^{CD}=\psi^{AD}\psi^{CA}\ \text{при}\ C\neq A,\ C\neq D.$$

Обратно, если ψ^{AB} удовлетворяют равенством (4), то существует система компонентов χ^{A}, определенных с точностью до умножения всех компонентов χ^{A} на произвольное комплексное число α, и система компонентов Ψ^{B}, определенных с точностью до одновременного умножения всех компонентов Ψ^{B} на $1/\alpha$ таких, что выполняется равенство $\psi^{AB}=\chi^{A}\Psi^{B}$. Если $\Psi^{CD}\neq 0$, то компоненты χ^{A}, ψ^{B} можно определить соотношениями

$$\{\chi^{A}\}=\alpha\psi^{AD},\ \{\psi^{B}\}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\psi^{CB}}{\psi^{CD}}, \tag{5}$$

Если выполняются равенства (4), то множества $\{\chi^{A}\}$, $\{\psi^{B}\}$ [1] не зависят от значений индексов C, D в формулах (5). Если выполняются равенства (4), то компоненты F в разложении (2), для которых в этом случае введем специальное обозначение K

$$\chi^{A}\psi^{B}=\frac{1}{4}\left(-Ke^{AB}+iK^{\alpha}\gamma^{AB}_{\alpha}-\frac{i}{2}K^{\alpha\beta}\gamma^{AB}_{\alpha\beta}+\overset{*}{K}{}^{\alpha}\overset{*}{\gamma}{}^{AB}_{\alpha}-\overset{*}{K}\gamma^{5AB}\right), \tag{6}$$

удовлетворяют ряду билинейных уравнений, которые получаются, если перемножить равенства (6), написанные для индексов A, B; C, D и свернуть результат со всевозможными спинтензорами γ:

$$K_{\alpha}K^{\alpha}=-\overset{*}{K}_{\alpha}\overset{*}{K}{}^{\alpha}=-K^{2}-\overset{*}{K}{}^{2},\ K_{\alpha}\overset{*}{K}{}^{\alpha}=0,$$

---

[1] Формула (5) определяет два (связанных комплексным параметром α) множества $\{\chi^{A}\}$, $\{\psi^{B}\}$ в каждой фиксированной ортогональной системе координат. Множества $\{\chi^{A}\}'$ и $\{\psi^{B}\}'$, определенные в преобразованных системах координат формулой (5), и эти же множества, получаемые соответствующим спинпреобразованием всех компонентов χ^{A} и ψ^{B} в силу ковариантности соотношений (4) в целом тождественны, несмотря на нековариантный вид определений (5).

$$\frac{1}{2} K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} = K^2 - \overset{*}{K}{}^2, \quad \frac{1}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta} K^{\alpha\beta} K^{\lambda\theta} = K\overset{*}{K}, \tag{7}$$

$$K K^{\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda}_{\ \alpha\beta\varepsilon} \overset{*}{K}{}^{\alpha} K^{\beta\varepsilon}, \quad K\overset{*}{K}{}^{\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda}_{\ \alpha\beta\varepsilon} K^{\alpha} K^{\beta\varepsilon},$$

$$\overset{*}{K} K^{\lambda} = -\overset{*}{K}_{\theta} K^{\lambda\theta}, \quad \overset{*}{K}\overset{*}{K}{}^{\lambda} = -K_{\theta} K^{\lambda\theta},$$

$$K^{\lambda} K^{\mu} = \overset{*}{K}{}^{\lambda} \overset{*}{K}{}^{\mu} + K^{\mu}_{\alpha} K^{\lambda\alpha} - K^2 g^{\lambda\mu},$$

$$\overset{*}{K} K^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} K K_{\alpha\beta} = K^{\mu} \overset{*}{K}{}^{\lambda} - K^{\lambda} \overset{*}{K}{}^{\mu},$$

$$K^{\lambda\mu} K^{\nu\theta} = (K^2 + \overset{*}{K}{}^2)(g^{\lambda\nu} g^{\mu\theta} - g^{\lambda\theta} g^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} \varepsilon^{\lambda\mu}_{\ \ \alpha\beta} \varepsilon^{\nu\theta}_{\ \ \eta s} K^{\alpha\beta} K^{\eta s} +$$

$$+ g^{\nu\lambda} (K^{\theta} K^{\mu} - \overset{*}{K}{}^{\theta} \overset{*}{K}{}^{\mu}) - g^{\mu\nu} (K^{\theta} K^{\lambda} - \overset{*}{K}{}^{\theta} \overset{*}{K}{}^{\lambda}) -$$

$$- g^{\lambda\theta} (K^{\mu} K^{\nu} - \overset{*}{K}{}^{\mu} \overset{*}{K}{}^{\nu}) + g^{\mu\theta} (K^{\lambda} K^{\nu} - \overset{*}{K}{}^{\lambda} \overset{*}{K}{}^{\nu}).$$

Ясно, что система тензоров K, удовлетворяющих равенствам (7), эквивалентна спинору второго ранга ψ^{AB}, удовлетворяющему равенствам (4). Поэтому задание тензоров K, удовлетворяющих равенствам (7), определяет два спинора χ^A, ψ^B с точностью до умножения их компонентов на произвольное комплексное число по формулам (5).

Если компоненты ψ^{AB} представляются в виде произведения $\psi^A \psi^B$ или $\chi^A \chi^B$, то формулу (2) можно записать в виде

$$\psi^A \psi^B = \frac{1}{4}\left(-C^{\alpha} \gamma^{AB}_{\alpha} + \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \gamma^{AB}_{\alpha\beta}\right),$$

$$\chi^A \chi^B = \frac{1}{4}\left(-C'^{\alpha} \gamma^{AB}_{\alpha} + \frac{1}{2} C'^{\alpha\beta} \gamma^{AB}_{\alpha\beta}\right), \tag{8}$$

где тензоры C определяются формулами [1]

$$C^{\alpha} = \gamma^{\alpha}_{AB} \psi^A \psi^B, \quad C^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}_{AB} \psi^A \psi^B. \tag{9}$$

Такими же формулами определяются тензоры C' (с заменой в (9) спинора ψ на спинор χ). Система тензоров C (C') эквивалентна спинору ψ (χ) [1, 2, 3].

Введем также второй метрический инвариантный спинор $\Pi = \|\Pi^{A}_{\dot{B}}\|$, определяемый соотношениями

$$\gamma_{\alpha} = \Pi \dot{\gamma}_{\alpha} \Pi^{-1}, \quad \Pi \dot{\Pi} = I.$$

Точка над буквой означает комплексное сопряжение. При помощи спинора Π определяются сопряженные спиноры ψ^+, χ^+ компонентами

$$\psi^{+A} = \Pi^{A}_{\dot{B}} \psi^{\dot{B}}, \quad \chi^{+A} = \Pi^{A}_{\dot{B}} \chi^{\dot{B}}.$$

Если компоненты спинора ψ^{AB} в формуле (2) представляются в виде произведения $\psi^{+A} \psi^B$, $\chi^{+A} \chi^B$, $\chi^{+A} \psi^B$, то формулу (2) запишем в виде

$$\psi^{+A} \psi^B = \frac{1}{4}\left(\Omega e^{AB} - i j^{\alpha} \gamma^{AB}_{\alpha} + \frac{i}{2} M^{\alpha\beta} \gamma^{AB}_{\alpha\beta} - S^{\alpha} \overset{*}{\gamma}{}^{AB}_{\alpha} + N \gamma^{5AB}\right), \tag{10}$$

$$\chi^{+A}\chi^{B}=\frac{1}{4}\Big(\Omega' e^{AB}-ij'^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{AB}+\frac{i}{2}M'^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{AB}-S'^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{AB}+N'\gamma^{5AB}\Big),$$

$$\chi^{+A}\psi^{B}=\frac{1}{4}\Big(-Ve^{AB}+iV^{\alpha}\gamma_{\alpha}^{AB}-\frac{i}{2}V^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{AB}+\overset{*}{V}{}^{\alpha}\overset{*}{\gamma}{}_{\alpha}^{AB}-\overset{*}{V}\gamma^{5AB}\Big).$$

Тензоры

$$D=\{\Omega,\ j^{\alpha},\ M^{\alpha\beta},\ S^{\alpha},\ N\},\ D'=\{\Omega',\ j'^{\alpha},\ M'^{\alpha\beta},\ S'^{\alpha},\ N'\},$$

$$V=\{V,\ V^{\alpha},\ V^{\alpha\beta},\ \overset{*}{V}{}^{\alpha},\ \overset{*}{V}\}$$

определяются формулой (3), в которой компоненты ψ^{AB} заменяются соответственно компонентами $-\psi^{+A}\psi^{B}$, $-\chi^{+A}\chi^{B}$, $\chi^{+A}\psi^{B}$. В силу определения спинтензоров γ и сопряженных спиноров компоненты тензоров D, D' вещественны [1].

Тензоры D, D' выражаются через тензоры K следующим образом:

$$4\Omega\Omega'=-\dot{K}K+\dot{K}_{\alpha}K^{\alpha}-\frac{1}{2}\dot{K}_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}-(\overset{*}{K}_{\alpha})^{\cdot}\overset{*}{K}{}^{\alpha}+(\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K}, \tag{11}$$

$$4\Omega' j^{\lambda}=-\dot{K}^{\lambda}K-K^{\lambda}\dot{K}-iK^{\alpha\lambda}K_{\alpha}+i\dot{K}_{\alpha}K^{\alpha\lambda}-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}_{\alpha\beta\varepsilon}[\dot{K}^{\beta\varepsilon}\overset{*}{K}{}^{\alpha}+(\overset{*}{K}{}^{\alpha})^{\cdot}K^{\beta\varepsilon}]+i\,[(\overset{*}{K}{}^{\lambda})^{\cdot}\overset{*}{K}-(\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K}{}^{\lambda}],$$

$$4\Omega' M^{\lambda\mu}=\delta^{\lambda\mu}_{\alpha\beta}\Big[-\frac{1}{2}\dot{K}^{\alpha\beta}K-\frac{1}{2}\dot{K}K^{\alpha\beta}-i\dot{K}^{\alpha\varepsilon}K^{\beta}_{.\varepsilon}-i\,(\overset{*}{K}{}^{\alpha})^{\cdot}\overset{*}{K}{}^{\beta}+i\dot{K}^{\alpha}K^{\beta}\Big],$$

$$+\varepsilon^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta}\Big[(\overset{*}{K}{}^{\beta})^{\cdot}K^{\alpha}+\dot{K}^{\alpha}\overset{*}{K}+\frac{1}{2}\dot{K}^{\alpha\beta}\overset{*}{K}+\frac{1}{2}(\overset{*}{K})^{\cdot}K^{\alpha\beta}\Big],$$

$$4\Omega' S^{\lambda}=-(\overset{*}{K}{}^{\lambda})^{\cdot}K-\dot{K}\overset{*}{K}{}^{\lambda}-i\,(\overset{*}{K})^{\cdot}K^{\lambda}+i\dot{K}^{\lambda}\overset{*}{K}-i\,(\overset{*}{K}_{\alpha})^{\cdot}K^{\lambda\alpha}+$$

$$+i\dot{K}^{\lambda\alpha}\overset{*}{K}_{\alpha}-\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}_{\alpha\beta\varepsilon}\big(\dot{K}^{\varepsilon}K^{\alpha\beta}+\dot{K}^{\alpha\beta}K^{\varepsilon}\big),$$

$$4\Omega' N=-(\overset{*}{K})^{\cdot}K-\dot{K}\overset{*}{K}-i\,(\overset{*}{K}_{\alpha})^{\cdot}K^{\alpha}+i\dot{K}_{\alpha}\overset{*}{K}{}^{\alpha}-\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}\dot{K}^{\lambda\theta}K^{\alpha\beta}.$$

Из (11) следует, что тензорный агрегат D определяется заданием тензоров K и скаляра Ω', если $\Omega'\neq 0$. (Вместо скаляра Ω' можно взять любой ненулевой компонент из D'.) Между тензорами C, D, C', D', K, V существуют различные перекрестные соотношения. Например:

$$V_{\alpha}C'^{\alpha}=2i\,(-\Omega' K-N'\overset{*}{K}),\ \ \overset{*}{V}_{\alpha}C'^{\alpha}=2\,(-\Omega'\overset{*}{K}+N'K),$$

$$V_{\alpha\beta}C'^{\alpha\beta}=4i\,(\Omega' K-N'\overset{*}{K}),\ \ \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}V^{\alpha\beta}C'^{\lambda\theta}=8i\,(\Omega'\overset{*}{K}+N'K),$$

$$VC'^{\lambda}=i\Omega' K^{\lambda}+ij'^{\lambda}K-S'^{\lambda}\overset{*}{K}+N'\overset{*}{K}{}^{\lambda},\ \ \overset{*}{V}C'^{\lambda}=-\Omega'\overset{*}{K}{}^{\lambda}+ij'^{\lambda}\overset{*}{K}+S'^{\lambda}K+iN'K^{\lambda},$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}_{\alpha\beta\varepsilon}\overset{*}{V}{}^{\alpha}C'^{\beta\varepsilon}=i\Omega' K^{\lambda}+ij'^{\lambda}K+S'^{\lambda}\overset{*}{K}-N'\overset{*}{K}{}^{\lambda},$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}_{\alpha\beta\varepsilon}V^{\alpha}C'^{\beta\varepsilon}=i\Omega'\overset{*}{K}{}^{\lambda}+iS'^{\lambda}K+j'^{\lambda}\overset{*}{K}-N'K^{\lambda},$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda}_{\alpha\beta\varepsilon}V^{\alpha\beta}C'^{\varepsilon}=i\Omega'\overset{*}{K}{}^{\lambda}+iS'^{\lambda}K-j'^{\lambda}\overset{*}{K}+N'K^{\lambda},$$

$$V^{\theta\lambda}C'_\theta = -\Omega' K^\lambda + j'^\lambda K + iS'^\lambda \overset{*}{K} + iN'\overset{*}{K}{}^\lambda,$$

$$V_\theta C'^{\theta\lambda} = \Omega' K^\lambda - j'^\lambda K + iS'^\lambda \overset{*}{K} + iN'\overset{*}{K}{}^\lambda,$$

$$\overset{*}{V}_\theta C'^{\theta\lambda} = \Omega'\overset{*}{K}{}^\lambda - S'^\lambda K + ij'^\lambda \overset{*}{K} + iN' K^\lambda, \tag{12}$$

$$-4V\dot{V} = \dot{K}K + \dot{K}_\alpha K^\alpha - \frac{1}{2}\dot{K}_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + (\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}\overset{*}{K}{}^\alpha - (\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K},$$

$$-4V(\overset{*}{V})^{\cdot} = (\overset{*}{K})^{\cdot}K + \dot{K}\overset{*}{K} - i(\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}K^\alpha - i\dot{K}_\alpha\overset{*}{K}{}^\alpha - \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}\dot{K}^{\lambda\theta}K^{\alpha\beta},$$

$$-4\overset{*}{V}(\overset{*}{V})^{\cdot} = -\dot{K}K + \dot{K}_\alpha K^\alpha + \frac{1}{2}\dot{K}_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + (\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}\overset{*}{K}{}^\alpha + (\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K}.$$

Свертывая соотношение (6) со спинорами χ^+_A, $\chi^{+C}\gamma^\alpha_{AC}$, ... по индексу A, найдем

$$4\Omega'\psi^B = \left(-Ke^{AB} + iK^\alpha\gamma^{AB}_\alpha - \frac{i}{2}K^{\alpha\beta}\gamma^{AB}_{\alpha\beta} + \overset{*}{K}{}^\alpha\overset{*}{\gamma}{}^{AB}_\alpha - \overset{*}{K}\gamma^{5AB}\right)\chi^+_A,$$

$$4j'^\lambda\psi^B = \Big[(iKg^{\lambda\beta} + K^{\lambda\beta})\gamma^{CB}_\beta + \frac{1}{2}(-K^\nu g^{\lambda\mu} + K^\mu g^{\lambda\nu} + i\overset{*}{K}_\alpha\varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu})\gamma^{CB}_{\mu\nu} +$$

$$+\left(-i\overset{*}{K}g^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}K_{\mu\nu}\varepsilon^{\lambda\beta\mu\nu}\right)\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_\beta + i\overset{*}{K}{}^\lambda\gamma^{5CB} + K^\lambda e^{CB}\Big]\chi^+_c,$$

$$4M'^{\lambda\mu}\psi^B = \Big[(i\overset{*}{K}_\alpha\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\varkappa} - K^\mu g^{\lambda\varkappa} + K^\lambda g^{\mu\varkappa})\gamma^{CB}_\varkappa + \Big(-\frac{i}{2}\overset{*}{K}\varepsilon^{\lambda\mu}_{\varkappa\eta} + \frac{i}{2}K\delta^{\lambda\mu}_{\varkappa\eta} +$$

$$+K^\mu{}_\eta\delta^\lambda_\varkappa - K^\mu{}_\eta\delta^\mu_\varkappa\Big)\gamma^{\varkappa\eta CB} + (K_\alpha\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\eta} + i\overset{*}{K}{}^\mu g^{\lambda\eta} - i\overset{*}{K}{}^\lambda g^{\mu\eta})\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_\eta +$$

$$+\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\gamma^{5CB}\Big]\chi^+_c,$$

$$4S'^\lambda\psi^B = \Big[-\overset{*}{K}{}^\lambda e^{CB} + \Big(\overset{*}{K}g^{\lambda\varepsilon} - \frac{i}{2}K_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\varepsilon}\Big)\gamma^{CB}_\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{2}(-iK_\alpha\varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu} + \overset{*}{K}{}^\nu g^{\lambda\mu} - \overset{*}{K}{}^\mu g^{\lambda\mu})\gamma^{CB}_{\mu\nu} + (Kg^{\lambda\alpha} - iK^{\lambda\alpha})\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_\alpha - iK^\lambda\gamma^{5CB}\Big]\chi^+_c,$$

$$4N'\psi^B = \Big[-\overset{*}{K}e^{CB} + \overset{*}{K}{}^\alpha\gamma^{CB}_\alpha - \frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\theta}K^{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\theta CB} - iK^\alpha\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_\alpha + K\gamma^{5CB}\Big]\chi^+_c. \tag{13}$$

Формулы (13) не изменятся, если в левой части тензоры D' заменить на тензоры $-K$ $(-V)$, а спинор χ^+ в правой части заменить на ψ (ψ^+). Свертывая (6) со спинорами $\chi^c\gamma^\alpha_{AC}$, $\chi^c\gamma^{\alpha\beta}_{AC}$ найдем также:

$$4C'^\lambda\psi^B = \Big[(Kg^{\lambda\beta} - iK^{\lambda\beta})\gamma^{CB}_\beta + \frac{1}{2}(iK^\nu g^{\lambda\mu} - iK^\mu g^{\lambda\nu} + \overset{*}{K}_\alpha\varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu})\gamma^{CB}_{\mu\nu} +$$

$$+\Big(-\overset{*}{K}g^{\lambda\beta} + \frac{i}{2}\varepsilon^{\lambda\beta\mu\nu}K_{\mu\nu}\Big)\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_\beta + \overset{*}{K}{}^\lambda\gamma^{5CB} - iK^\lambda e^{CB}\Big]\chi_c,$$

$$4C'^{\lambda\mu}\psi^B = \Big[(\overset{*}{K}_\alpha\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\varkappa} + iK^\mu g^{\lambda\varkappa} - iK^\lambda g^{\mu\varkappa})\gamma^{CB}_\varkappa +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\overset{*}{K}\varepsilon^{\lambda\mu}{}_{\varkappa\eta}+\frac{1}{2}K\delta^{\lambda\mu}_{\varkappa\eta}-iK^{\mu}{}_{\eta}\delta^{\lambda}_{\varkappa}+iK^{\lambda}{}_{\eta}\delta^{\mu}_{\varkappa}\right)\gamma^{\varkappa\eta CB}+$$

$$+\left(-iK_{\alpha}\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\eta}+\overset{*}{K}{}^{\mu}g^{\lambda\eta}-\overset{*}{K}{}^{\lambda}g^{\mu\eta}\right)\overset{*}{\gamma}{}^{CB}_{\eta}-\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\gamma^{5CB}\Big]\chi_{c}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) могут служить для определения спинора ψ через тензоры K и через спинор χ. Эти формулы можно также использовать вместо формул (6), (8), (10) для получения билинейных уравнений, связывающих тензоры C, D, C', D', K, V, которые получаются при свертке (13) и (14) со спинорами $\chi^{c}\gamma^{\alpha}_{AC}$,

Запись уравнений Дирака в тензорах K. Уравнения Дирака в пространстве R_4, отнесенном к декартовой системе координат с переменными x^{α}, имеют вид [5]

$$\gamma^{A\alpha}_{B}\left(\partial_{\alpha}\psi^{B}+\frac{ie}{\hbar c}A_{\alpha}\psi^{B}\right)+\varkappa\psi^{A}=0, \quad (15)$$

где ψ — поле четырехкомпонентного спинора, определенное в декартовой системе координат x^{α}, A_{α} — ковариантные компоненты векторного потенциала электромагнитного поля; e, $\hbar$, $\varkappa$, c — постоянные; $\partial_{\alpha}=\partial/\partial x^{\alpha}$.

Для лагранжиана Λ и для компонентов P_{α}^{β} тензора энергии-импульса поля, описываемого уравнениями (15), имеем [4]

$$P^{\beta}_{\alpha}=\frac{\hbar c}{2}\gamma^{\beta}_{AB}\left(-\psi^{+A}\partial_{\alpha}\psi^{B}+\psi^{B}\partial_{\alpha}\psi^{+A}\right)+eA_{\alpha}j^{\beta}, \quad (16)$$

$$\Lambda=\frac{\hbar c}{2}\gamma^{\alpha}_{AB}\left(-\psi^{+A}\partial_{\alpha}\psi^{B}+\psi^{B}\partial_{\alpha}\psi^{+A}\right)+eA_{\alpha}j^{\alpha}+\varkappa\hbar c\Omega=P^{\alpha}_{\alpha}+\varkappa\hbar c\Omega.$$

Свертывая уравнения (15) со спинтензорами χ_{A}, $\gamma^{\beta}_{AB}\chi^{B}$, $\gamma^{\beta\gamma}_{AB}\chi^{B}$, $\overset{*}{\gamma}{}^{\beta}_{AB}\chi^{B}$, $\gamma^{5}_{AB}\chi^{B}$ по индексу A, где χ^{B} — произвольное постоянное ненулевое спинорное поле в пространстве R_{4} ($\partial_{\alpha}\chi^{B}=0$), получим систему тензорных уравнений, являющихся следствием уравнений (15):

$$d_{\alpha}K^{\alpha}+i\varkappa K=0, \quad (а)$$

$$d_{\beta}\left(K^{\alpha\beta}+iKg^{\alpha\beta}\right)+\varkappa K^{\alpha}=0, \quad (б)$$

$$d_{\gamma}\left(-i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\overset{*}{K}_{\varepsilon}-g^{\alpha\gamma}K^{\beta}+g^{\beta\gamma}K^{\alpha}\right)+\varkappa K^{\alpha\beta}=0, \quad (в)$$

$$d_{\beta}\left(\overset{*}{K}g^{\alpha\beta}-i/2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varepsilon}K_{\gamma\varepsilon}\right)-\varkappa\overset{*}{K}{}^{\alpha}=0, \quad (г) \qquad (17)$$

$$d_{\alpha}\overset{*}{K}{}^{\alpha}-\varkappa\overset{*}{K}=0. \quad (д)$$

Здесь обозначено $d_{\alpha}=\partial_{\alpha}+\frac{ie}{\hbar c}A_{\alpha}$. В качестве независимых уравнений в (17) можно взять, например, любые четыре уравнения в (17, в) (при соответствующем выборе поля χ^{B}). Уравнения (17, а), (17, б) и уравнения (17, г), (17, д) содержат по три независимых уравнения. Независимые уравнения в (17) вместе с алгебраическими уравнениями (7), (11), (12) эквивалентны уравнениям Дирака (15) [1]. Очевидно, что

[1] В рамках уравнений (17), при наличии соотношений $K\sim\chi\cdot\psi$ физические характеристики (спин, ток и т. д.) поля, описываемого уравнениями (17), в классическом рассмотрении определяются величинами S^{λ}, j^{λ}, ..., выражающимися через тензоры K и скаляр Ω' по формулам (11).

в силу использованного при выводе уравнений (17) условия $\partial_\alpha \chi^B = 0$, тензоры D', C' удовлетворяют дополнительным уравнениям $\partial_\alpha D' = \partial_\alpha C' = 0$ и могут рассматриваться как заданные. Отметим, что вывод уравнений (17) не связан с условием $\varkappa = \mathrm{const}$, поэтому вид уравнений (17) не изменится, если в качестве исходных уравнений вместо уравнений Дирака взять уравнения Гюрши [5].

Заменяя в определении (16) компоненты ψ по формулам (14), для компонентов P^β_α получим

$$P^\beta_\alpha = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big\{-\partial_\alpha(-j_\eta M'^{\beta\eta} + N'S^\beta) + i(\dot K^\beta \partial_\alpha K - K^\beta \partial_\alpha \dot K) + \dot K^{\beta\gamma}\partial_\alpha K_\gamma +$$

$$+ K^{\beta\gamma}\partial_\alpha \dot K_\gamma + \frac{i}{2}\varepsilon^{\beta\eta\mu\nu}[\dot K_{\mu\nu}\partial_\alpha \overset{*}{K}{}_\eta^{\cdot} - K_{\mu\nu}\partial_\alpha(\overset{*}{K}_\eta)^\cdot] + (\overset{*}{K}{}^\beta)^\cdot \partial_\alpha \overset{*}{K} +$$

$$+ \overset{*}{K}{}^\beta \partial_\alpha (\overset{*}{K})^\cdot\Big\} + eA_\alpha j^\beta, \qquad (18)$$

где

$$-j_\eta M'^{\beta\eta} + N'S^\beta = \frac{1}{2}\Big\{i(-\dot K K^\beta + K\dot K^\beta) + \dot K_\gamma K^{\beta\gamma} + K_\gamma \dot K^{\beta\gamma} +$$

$$+ \frac{i}{2}\varepsilon^{\beta\eta\mu\nu}[-(\overset{*}{K}_\eta)^\cdot K_{\mu\nu} + \overset{*}{K}_\eta \dot K_{\mu\nu}] + (\overset{*}{K})^\cdot \overset{*}{K}{}^\beta + \overset{*}{K}(\overset{*}{K}{}^\beta)^\cdot\Big\}. \qquad (19)$$

Из (16) и (18) следует, что для лагранжиана Λ справедлива формула

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big\{-\underset{\alpha}{\partial}(-j_\eta M'^{\alpha\eta} + N'S^\alpha) + i(\dot K^\alpha \partial_\alpha K - K^\alpha \partial_\alpha \dot K) + \dot K^{\alpha\gamma}\partial_\alpha K_\gamma +$$

$$+ K^{\alpha\gamma}\partial_\alpha \dot K_\gamma + \frac{i}{2}\varepsilon^{\beta\alpha\mu\nu}[\dot K_{\mu\nu}\partial_\beta \overset{*}{K}_\alpha - K_{\mu\nu}\partial_\beta(\overset{*}{K}_\alpha)^\cdot] + (\overset{*}{K}{}^\alpha)^\cdot \partial_\alpha \overset{*}{K} + \overset{*}{K}{}^\alpha \partial_\alpha(\overset{*}{K})^\cdot +$$

$$+ \varkappa\Big[-\dot K K + \dot K_\alpha K^\alpha - \frac{1}{2}\dot K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - (\overset{*}{K}_\alpha)^\cdot \overset{*}{K}{}^\alpha + (\overset{*}{K})^\cdot \overset{*}{K}\Big]\Big\} + eA_\alpha j^\alpha. \qquad (20)$$

Уравнения (17) получаются из вариационного принципа с лагранжианом (20) и в том случае, когда тензоры K и D' не связаны соотношениями (7), (11) и (12).

Специально отметим, что спинорное поле χ^B в (17)—(20) является вспомогательным, причем, если выполнены соотношения (7), (11) и (12) вместе с условиями $\partial_\alpha D' = \partial_\alpha C' = 0$ то определения (18) и (20) для P^β_α и для Λ не зависят от выбора χ^B (так как преобразование от (16) к (18), (20) является тождественным).

Тензорная запись уравнений Паули—Янга—Ли. Уравнения Паули—Янга—Ли получаются из уравнений (15), если положить в (15) $A_\alpha = 0$, $\varkappa = 0$, $\psi = \pm i\gamma^5\psi$.

Уравнения в тензорах K, соответствующие уравнениям Паули—Янга—Ли, имеют вид

$$\partial_\alpha K^\alpha = 0,\ \partial_\beta(K^{\alpha\beta} + iKg^{\alpha\beta}) = 0,$$

$$\partial_\gamma(\pm i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\eta}K_\eta - g^{\alpha\gamma}K^\beta + g^{\beta\gamma}K^\alpha) = 0.$$

Для компонентов тензора энергии-импульса и для лагранжиана поля, описываемого уравнениями Паули—Янга—Ли, найдем

$$P^\beta_\alpha = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big[-\frac{1}{2}\underset{\alpha}{\partial}(-j_\eta M'^{\beta\eta} \mp N'j^\beta) + i(\dot K^\beta \partial_\alpha K - K^\beta \partial_\alpha \dot K) +$$

$$+\dot{K}^{\beta\eta}\partial_\alpha K_\eta + K^{\beta\eta}\partial_\alpha \dot{K}_\eta\Big],$$

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big[\frac{1}{2}\underset{\alpha}{\partial}(-j_\eta M'^{\alpha\eta} \mp N' j^\alpha) +$$

$$+ i(\dot{K}^\alpha \partial_\alpha K - K^\alpha \partial_\alpha \dot{K}) + \dot{K}^{\alpha\eta}\partial_\alpha K_\eta + K^{\alpha\eta}\partial_\alpha \dot{K}_\eta\Big].$$

Поле Дирака как слияние тензорных волновых полей. Введем следующие обозначения:

$$\Lambda_1(K, G^\alpha) = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big[i\dot{G}^\alpha d_\alpha K - iG^\alpha (d_\alpha K)^{\cdot} +$$

$$+ \varkappa_1(\dot{G}_\alpha G^\alpha - \dot{K}K) - \frac{i}{2}\partial_\alpha(\dot{K}G^\alpha - K\dot{G}^\alpha)\Big],$$

$$\Lambda_2(K^\alpha, G^{\alpha\beta}) = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big[\dot{G}^{\alpha\beta} d_\alpha K_\beta + G^{\alpha\beta}(d_\alpha K_\beta)^{\cdot} +$$

$$+ \varkappa_2\Big(\dot{K}_\alpha K^\alpha - \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}\Big) + \frac{1}{2}\partial_\alpha(\dot{K}_\gamma G^{\alpha\gamma} + K_\gamma \dot{G}^{\alpha\gamma})\Big], \tag{21}$$

$$\Lambda_3(\overset{*}{G}{}^\alpha, K^{\alpha\beta}) = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big\{\frac{i}{2}\varepsilon^{\beta\alpha\mu\nu}[\dot{K}_{\mu\nu} d_\beta \overset{*}{G}_\alpha - K_{\mu\nu}(d_\beta \overset{*}{G}_\alpha)^{\cdot}] -$$

$$- \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\mu\nu}\partial_\alpha[-(\overset{*}{G}_\beta)^{\cdot} K_{\mu\nu} + \overset{*}{G}_\beta \dot{K}_{\mu\nu}] - \varkappa_3\Big[(\overset{*}{G}_\alpha)^{\cdot}\overset{*}{G} + \frac{1}{2}\dot{K}_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\Big]\Big\},$$

$$\Lambda_4(\overset{*}{K}, \overset{*}{K}{}^\alpha) = \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big\{(\overset{*}{K}{}^\alpha)^{\cdot} d_\alpha \overset{*}{K} + \overset{*}{K}{}^\alpha (d_\alpha \overset{*}{K})^{\cdot} + \varkappa_4[(\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K} - (\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}\overset{*}{K}{}^\alpha] +$$

$$+ \frac{1}{2}\partial_\beta[(\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K}{}^\beta + \overset{*}{K}(\overset{*}{K}{}^\beta)^{\cdot}]\Big\}, \tag{22}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ — некоторые постоянные; Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 являются лагранжианами классических полей Клейна—Гордона K, K^α, $\overset{*}{G}{}^\alpha$, $\overset{*}{K}$ [6].

Пользуясь определениями (20) и (21) для лагранжианов Λ, Λ_i, тождественно найдем

$$\Lambda \equiv \Lambda_1(K, K^\alpha) + \Lambda_2(K^\alpha, K^{\alpha\beta}) + \Lambda_3(\overset{*}{K}{}^\alpha, K^{\alpha\beta}) + \Lambda_4(\overset{*}{K}, \overset{*}{K}{}^\alpha) +$$

$$+ \frac{\hbar c}{4\Omega'}\Big[(\varkappa_1 - \varkappa)\dot{K}K + (\varkappa - \varkappa_1 - \varkappa_2)\dot{K}_\alpha K^\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}(\varkappa_2 + \varkappa_3 - \varkappa)\dot{K}_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + (\varkappa_3 + \varkappa_4 - \varkappa)(\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}\overset{*}{K}{}^\alpha + (\varkappa - \varkappa_4)(\overset{*}{K})^{\cdot}\overset{*}{K}\Big]. \tag{23}$$

При условиях слияния, заключающихся в выполнении соотношений $G^\alpha = K^\alpha$, $G^{\alpha\beta} = K^{\alpha\beta}$, $\overset{*}{G}{}^\alpha = \overset{*}{K}{}^\alpha$, соотношений (7), (11), (12) и условий [1] $\partial_\alpha D' = \partial_\alpha C' = 0$, из равенства (23) для лагранжиана Λ следует, что поле ψ, описываемое уравнениями Дирака (15), можно рассматривать как слия-

[1] Вместо соотношений (7), (11), (12) и условий $\partial_\alpha D' = \partial_\alpha C' = 0$ в качестве условий слияния можно взять эквивалентные им условия представимости компонентов K, D' через $\chi\psi$ и условие $\partial_\alpha \chi^B = 0$. Компоненты η^B в этом случае можно рассматривать как постоянные интегрирования уравнений $\partial_\alpha D' = \partial_\alpha C' = 0$, в которых D' и C' выражаются по формулам (11), (12) через тензоры K.

ние комплексного скалярного поля K, описываемого лагранжианом $\Lambda_1(K, K^\alpha)$, комплексного векторного поля G^α, описываемого лагранжианом $\Lambda_\alpha(G^\alpha, K^{\alpha\beta})$, комплексного псевдовекторного поля $\overset{*}{K}{}^\alpha$, описываемого лагранжианом $\Lambda_3(\overset{*}{K}{}^\alpha, G^{\alpha\beta})$, и комплексного псевдоскалярного поля $\overset{*}{K}$, описываемого лагранжианом $\Lambda_4(\overset{*}{K}, \overset{*}{G}{}^\alpha)$ с лагранжианом взаимодействия [1]

$$\Lambda_{\text{вз}} = \frac{\hbar c}{8\Omega'}\Big\{(\varkappa_1 - \varkappa)(\dot{K}G + K\dot{G}) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa)(\dot{K}_\alpha G^\alpha + K_\alpha \dot{G}^\alpha) +$$

$$+ (\varkappa_2 + \varkappa_3 - \varkappa)\frac{1}{2}(\dot{K}_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}\dot{G}^{\alpha\beta}) + (\varkappa_3 + \varkappa_4 - \varkappa)[(\overset{*}{K}_\alpha)^{\cdot}\,\overset{*}{G}{}^\alpha +$$

$$+ \overset{*}{K}_\alpha(\overset{*}{G}{}^\alpha)^{\cdot}] + (\varkappa - \varkappa_4)[(\overset{*}{K})^{\cdot}\,\overset{*}{G} + \overset{*}{K}(\overset{*}{G})^{\cdot}]\Big\}. \tag{24}$$

Функции G, $\overset{*}{G}$ в (24) можно определить равенствами

$$G = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} - G_\alpha G^\alpha\right), \quad \overset{*}{G} = \frac{1}{2\overset{*}{K}}\left(-\frac{1}{2}G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta} + \overset{*}{K}_\alpha\overset{*}{K}{}^\alpha\right)$$

или равенствами

$$G = \frac{1}{8\overset{*}{K}}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}K^{\alpha\beta}K^{\mu\nu}, \quad \overset{*}{G} = \frac{1}{8K}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}K^{\alpha\beta}K^{\mu\nu}.$$

Коэффициенты $\varkappa_i$ в (21)—(24) могут быть вообще произвольными не равными нулю постоянными. Для того чтобы фиксировать величины $\varkappa_i$, можно воспользоваться условием «минимальности» лагранжиана взаимодействия. При выполнении условий слияния, пользуясь соотношениями (11) и определением (24), для лагранжиана $\Lambda_{\text{вз}}$ можно написать

$$\Lambda_{\text{вз}} = \frac{\hbar c}{8\Omega'}\Big\{\Omega'\Omega\left(8\varkappa - \frac{5}{2}\varkappa_1 - 5\varkappa_2 - 5\varkappa_3 - \frac{5}{2}\varkappa_4\right) +$$

$$+ j'_\alpha j^\alpha\left(\frac{1}{2}\varkappa_1 + \varkappa_2 - \varkappa_3 - \frac{1}{2}\varkappa_4\right) + \frac{1}{2}M'_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\varkappa_1 - \varkappa_2 -\right.$$

$$\left. - \varkappa_3 + \frac{1}{2}\varkappa_4\right) + S'_\alpha S^\alpha\left(-\frac{3}{2}\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_3 + \frac{3}{2}\varkappa_4\right) +$$

$$+ N'N\left(-\frac{3}{2}\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 - \frac{3}{2}\varkappa_4\right)\Big\}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что при $\varkappa_1 = \varkappa_4 = \frac{4}{5}\varkappa$ и $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \frac{2}{5}\varkappa$, лагранжиан взаимодействия становится минимальным: $\Lambda_{\text{вз}} = -\hbar c N'N/5\Omega'$.

Относя часть членов Λ_i лагранжиана Λ к лагранжиану взаимодействия, аналогичным образом можно рассмотреть ряд других случаев слияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желнорович В. А. «Теоретическая и математическая физика», **2**, № 1, 1970.
2. Желнорович В. А. ДАН СССР, **169**, № 2, 1966.

[1] Дивергентные члены из Λ_i также можно включить в лагранжиан взаимодействия.

3. Желнорович В. А. «Прикладная математика и механика», **30**, вып. 6, 1966.
4. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. М., ИЛ, 1947.
5. Gursey F. Nuovo, Cim., **3**, 988, 1956.
6. Фок В. А. ЖРФХО, физ. **62**, 1930.
7. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1949.
8. De Broglie, Lui. Theorie generale des particules a spin (Methode de fussion), Paris, 1954.
9. Belinfante F. J. Physica, **7**, 305, 1940.

Поступила в редакцию
18.6 1971 г.

Институт
механики МГУ

Примечание в корректуре. Если обозначить столбец из компонентов K, K^{α}, $K^{\alpha\beta}$, $\overset{*}{K}{}^{\alpha}$, $\overset{*}{K}$ через K, то уравнения (17) можно записать в виде $G^{\alpha}d_{\alpha}K + \varkappa K = 0$, где G^{α} — шестнадцатирядные матрицы, удовлетворяющие уравнению $G^{\alpha}G^{\beta} + G^{\beta}G^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}I$, I — единичная матрица. Обозначив через K столбец из компонентов K, K^{α}, $K^{\alpha\beta}$

$$\left(K^{\alpha\beta} = \pm \frac{i}{2}\, \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\varepsilon} K_{\lambda\varepsilon}\right),$$

тензорные уравнения, соответствующие уравнениям Паули — Янга — Ли, можно записать в виде $S^{\alpha}\partial_{\alpha}K = 0$, где S^{α} — восьмирядные матрицы, удовлетворяющие уравнениям $S^iS^j + S^jS^i = 2\delta^{ij}I$, $S^4S^i = S^iS^4$, $S^4S^4 = I$; i, $j = 1, 2, 3$.