$$P=\frac{\mu_\rho^2\,\widetilde{\omega}^4}{4c^3}\int\limits_0^\pi\frac{(1+\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta}{(1-\beta_\parallel\cos\theta)^5}=\frac{2}{3}\,\frac{\mu_\rho^2\,\widetilde{\omega}^4}{c^3}\,\frac{1+2\beta_\parallel^2}{(1-\beta_\parallel^2)^4}. \qquad (10)$$

При $\beta_\parallel=0$ получаем результат [11].

Авторы благодарят профессора А. А. Соколова за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. «Успехи физических наук», 103, 393, 1971.
2. Сб. «Явления нестационарности и звездная эволюция», под ред. А. А. Боярчука, гл. 3. М., «Наука», 1972.
3. Докучаев В. П. «Изв. вузов», радиофизика, 14, 60, 1971.
4. Соколов А. А., Жуковский В. Ч. и др. «Изв. вузов», радиофизика, № 2, 107, 1971.
5. Куканов А. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астр., 11, № 5, 132, 1971.
6. Куканов А. Б. «Изв. вузов», физика, № 1, 47, 1970.
7. Куканов А. Б. «Изв. вузов», физика, № 2, 28, 1961.
8. Тамм И. Е., Франк И. М. ДАН СССР, 14, 107, 1937.
9. Гинзбург В. Л. ЖЭТФ. 10, 589, 1940.
10. Франк И. М. «Изв. АН СССР», сер. физика, 6, 3, 1942.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. «Классическая теория поля». М., «Наука», 1967, стр. 247.

Поступила в редакцию
15.11 1971 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 525.11 : 525.223

Л. А. САВРОВ

СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ СФЕРИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В СЛУЧАЕ ЗЕМНОГО ДВУХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Используя выражения разложения потенциала в ряд по сферическим функциям в случае симметрии по отношению к оси вращения Земли [1], можно написать для силы тяжести на поверхности земного двухосного эллипсоида вращения формулу

$$g=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+2}}\,I_nP_n(\varphi)\,\frac{\partial\rho}{\partial r}, \qquad (1)$$

где I_n — зональные сферические коэффициенты, зависящие от распределения плотности внутри Земли, $P_n(\varphi)$ — полиномы Лежандра, ρ_0 — радиус выбранной сферы, ρ — расстояние от центра Земли (начала системы координат) до земной поверхности; r — нормаль к земной поверхности в точке с координатами λ, μ, ν, φ — широта. В системе эллипсоидальных координат λ, μ, ν на поверхности эллипсоида Земли ($\lambda=0$) для осесимметричного случая ($\nu=\text{const}$, $E_n^m(\nu)=\text{const}$) формула разложения силы тяжести по произведениям эллипсоидальных функций $E(\mu)E(\nu)$ [2] примет вид

$$g=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n+1}C_n^m E_n^m(\mu), \qquad (2)$$

где $C_n^m=B_n^m E_n^m\,(\nu=\text{const})$ — коэффициенты эллипсоидального разложения, $E_n^m(\mu)$ — эллипсоидальные функции n-го порядка, m — индекс, показывающий число функций соответствующего из четырех типов.

Сравнение формул (1) и (2) дает

$$(n+1)\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+2}} I_n P_n(\varphi)\frac{\partial\rho}{\partial r}=\sum_{m=1}^{2n+1} C_n^m E_n^m(\mu).$$

Используем свойство ортогональности эллипсоидальных функций. Умножим обе части этого равенства на $E_{n'}^{m'}(\mu)$ и проинтегрируем их по пределам h и k эллипсоидальной координаты μ (аналог сферической широты φ); h и k являются постоянными земного эллипсоида (для осесимметричного случая $h=0$, $k=a^2-c^2$, где a и c — полуоси эллипсоида). В правой части равенства останется один интеграл в случае $n=n'$ и $m=m'$ остальные интегралы обратятся в нуль. Получим

$$C_n^m=\frac{\int\limits_n^k (n+1)\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+2}}\frac{\partial\rho}{\partial r} I_n P_n E_n^m(\mu)\,d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,d\mu}. \tag{3}$$

Сделаем некоторые преобразования. Известно, что $\rho=\rho_0(1+\alpha\sin^2\varphi)$, где α — сжатие Земли. Тогда $\rho^{n+2}=\rho_0^{n+2}(1+\alpha\sin^2\varphi)^{n+2}$. Разложив выражение в круглой скобке по степеням малого параметра и ограничиваясь членами порядка сжатия, получим

$$\frac{\rho^n}{\rho^{n+2}}=\frac{1-(n+2)\alpha\sin^2\varphi}{\rho_0^2}. \tag{4}$$

Величину $\partial\rho/\partial r$ можно оценить из сравнения геоцентрической широты Φ и геодезической широты φ. Известно [3], что

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\sec(r^\wedge,\ \rho)=\sec\varepsilon,\quad \varepsilon=\varphi-\Phi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\Phi,$$

где a и b — полуоси эллипсоида. Разложим $\operatorname{tg}(\Phi+\varepsilon)$ в ряд с удерживанием членов порядка ε. Тогда $\varepsilon\approx\alpha\sin2\varphi$, т. е. $\partial\rho/\partial r=\sec(\alpha\sin2\varphi)$. Разложим sec в ряд и, удержав члены порядка α, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=1+\frac{1}{2}\alpha^2\sin2\varphi. \tag{5}$$

Ранее нами была установлена связь между сферическими и эллипсоидальными функциями [4]. Для зональных гармоник формула связи имеет вид

$$P_n=\sum_{s=1}^{\sigma}\beta_s E_n^s(\mu), \tag{6}$$

где

$$\sigma=\begin{cases}\frac{1}{2}n+1 & \text{при четном}\\ \frac{1}{2}(n+1) & \text{при нечетном.}\end{cases}$$

Подставив результаты (4), (5) и (6) в формулу (3), применив снова свойство ортогональности эллипсоидальных функций (при $s=m$ интеграл не равен нулю) и сделав простые преобразования, получим

$$C_n^m=I_n\frac{n+1}{\rho_0^2}\left\{\beta_m-\alpha\beta_m(n+2)\frac{\int\limits_h^k\sin^2\varphi\,[E_n^m(\mu)]^2\,d\mu}{\int\limits_h^k[E_n^m(\mu)]^2\,d\mu}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\alpha^2\beta_m \frac{\int\limits_h^k \sin^2 2\varphi\, [E_n^m(\mu)]^2 d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\, d\mu}\Bigg\}. \tag{7}$$

Связь между сферическими и эллипсоидальными координатами осуществляется в виде формул

$$\sin^2\varphi = \frac{k^2h^2 - \mu^2\nu^2}{k^2h^2}, \quad \sin^2 2\varphi = \frac{4\mu^2\nu^2\,(k^2h^2 - \mu^2\nu^2)}{k^4h^4}.$$

Так как $\nu = \text{const}$, положим $\nu = h$, тогда

$$\sin^2\varphi = \frac{k^2 - \mu^2}{k^2}, \quad \sin^2 2\varphi = \frac{4\mu^2\,(k^2 - \mu^2)}{k^4}.$$

Подставив вместо $\sin^2\varphi$ и $\sin^2 2\varphi$ их значения в (7), получим формулу связи коэффициентов

$$C_n^m = I_n \frac{n+1}{\rho_0^2}\left\{\beta_m - \alpha\beta_m \frac{n+2}{k^2}\frac{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,(k^2-\mu^2)\,d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,d\mu} + \right.$$

$$\left. + \alpha^2\beta_m \frac{2}{k^4}\frac{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,(k^2-\mu^2)\,\mu^2 d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,d\mu}\right\}. \tag{8}$$

Эту формулу можно еще привести к виду

$$C_n^m = I_n \frac{n+1}{\rho_0^2}\left\{\beta_m - \alpha\beta_m\,(n+2) + \alpha\beta_m \frac{n+2}{k^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,\mu^2 d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)^2]\,d\mu} + \alpha^2\beta_m\frac{2}{k^4}\frac{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,(k^2\mu^2 - \mu^4)\,d\mu}{\int\limits_h^k [E_n^m(\mu)]^2\,d\mu}\right\}. \tag{9}$$

Для трехосного эллипсоида подобные формулы тоже выводились в некоторых работах [5]. Однако при попытке получения численного результата, возникают значительные трудности из-за громоздкости входящих туда тройных интегралов. Интегралы же формулы (9) легко вычисляются с помощью ЭВМ. А коэффициенты сферического разложения по наблюдениям с помощью искусственных спутников Земли уже известны до 36-го порядка [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Холшевников К. В. «Вестн. Ленингр. ун-та», № 13, 1965.
2. Савров Л. А. Разложение аномалий силы тяжести в ряды по эллипсоидальным функциям Ламе. «Тр. Астрономического ин-та», 43, 1971.
3. Маловичко А. К. Основной курс гравиразведки. Пермь, 1960.
4. Савров Л. А., Сагитов М. У. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 2, 1971.
5. Walter G. Nr. 3, 1970.
6. Gaposchkin E. M., Korai V., Veis G., Weiffenbach G. Geodetic studies at the Smithsonial Astrophysical Observatory. Cambridge, Massachusetts, 1971, ss. 02138.

Поступила в редакцию
19.11 1971 г.

ГАИШ