Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ДВУХМЕРНЫЕ ПЛОЩАДКИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Предложен диадный формализм для описания двухмерных распределений в рамках общей теории относительности. Вводятся понятия и определения индуцированного внешнего дифференцирования, индуцированной группы движения для риманова распределения, однородности последнего (в том числе физического пространства), жанров пространства-времени. С помощью индуцированного даламбертиана записаны уравнения для гравитационных диффузионных и волновых процессов. Дается диадная формулировка уравнений Эйнштейна и законов сохранения.

В настоящей работе предлагается диадный формализм, приуроченный к расщеплению пространства-времени V^4 на двухмерное пространство и двухмерное пространство-время. Этот формализм заполняет пробел между монадным формализмом Зельманова, представляющим собой общековариантное обобщение его метода хронометрических инвариантов [1—3] (некоторые формулы из упомянутых в [3] любезно сообщены Зельмановым автору до их опубликования), и формализмом тетрадным. Разумно полагать, что при переходе от плоского и неделимого (в смысле отсутствия преимущественного способа деления) пространства-времени Минковского к искривленному лоренцеву многообразию V^4 возникает возможность естественного деления многообразия событий на части сообразно природе и свойствам создающего кривизну физического субстрата подобно тому, как оператор (например тензор кривизны) делит пространство на инвариантные подпространства. В частности, вещество делит пространство-время на время и пространство (тип $\overset{*}{T}_1$ по Петрову, главный вектор Римана, т. е. вектор следования за гравитационным полем, временноподобен), а гравитационные волны на двухмерные подпространства (типы $\overset{*}{T}_2$, $\overset{*}{T}_3$, главный вектор Римана изотропен). Во всех этих случаях можно привлекать и каноническую тетраду Петрова, в которой тензор Вейля (в конформно-плоских — тензор Римана) имеет канонический вид, но неоднозначный выбор этой тетрады для волновых гравитационных полей алгебраически специального типа обычно означает естественную выделенность именно двухмерных площадок. В этих случаях естественно привлекать диадный формализм. Формализм диад позволяет также свести изучение 4-геометрии V^4 к 2-геометрии двухмерного распределения V_2^4 (отметим, что распределение является примером G-структуры и называется также неголономным многообразием, пфаффовой системой), если V^4 имеет орбитами группы движения двухмерное слоение. Возможны и другие применения диадного формализма, предметом которого является геометрия римановых распределений V_2^4 в пространстве-времени и ее физический эквивалент. Сама же по себе необходимость привлечения распределений в общую теорию относительности видна уже из того, что время, физическое пространство, собственные листы тензоров конформной и риччиевой кривизны суть примеры этих распределений (V_1^4, V_2^4, V_3^4).

Рассмотрим индуцированные дифференциальные операторы для распределений. Пусть

$$TV^n(g) = V_m^n(a) + V_{n-m}^n(b),$$

$$g_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + b_{\mu\nu},\ a_\mu^\lambda + b_\mu^\lambda = \delta_\mu^\lambda,\ \mu, \nu, \lambda = 1, \dots, n,$$

$$V_m^n : x \mapsto E_x^m \in T_x V^n,\ V_{n-m}^n : x \mapsto E_x^{n-m} \in T_x V^n,\ x \in V^n,$$

$$a_\mu^\lambda : TV^n \to V_m^n,\ b_\mu^\lambda : TV^n \to V_{n-m}^n.$$

Матрица $(a^{\mu\nu})$ псевдообратна матрице $(a_{\mu\nu})$ того же ранга m (берем неизотропные распределения). Идемпотентная матрица (a_μ^λ) есть проектор. Заметим, что поскольку распределение V_m^n снабжено метрикой, оно (после выбора ориентации) изоморфно полю единичного простого m-вектора.

Пусть дано тензорное поле, принадлежащее пространству

$$V_m^n \otimes \dots \otimes V_m^n \otimes V_{n-m}^n \otimes \dots \otimes V_{n-m}^n:$$

$$T_{\mu\dots\nu\lambda\dots\varkappa} = a_{\mu\dots\nu}^{\alpha\dots\beta} b_{\lambda\dots\varkappa}^{\gamma\dots\delta} T_{\alpha\dots\beta\,\gamma\dots\delta},$$

$$a_{\mu\dots\nu}^{\alpha\dots\beta} \equiv a_\mu^\alpha \dots a_\nu^\beta,\ b_{\lambda\dots\varkappa}^{\gamma\dots\delta} \equiv b_\lambda^\gamma \dots b_\varkappa^\delta.$$

Определим индуцированные операторы частного $(D_\rho = \partial_\rho \equiv \partial/\partial x_f^\rho)$, лиевского $(D = \mathfrak{L}_\xi)$ и ковариантного $(D_\rho = \nabla_\rho)$ дифференцирования с чертой

$$\underline{D}_\rho T_{\mu\dots\nu\,\lambda\dots\varkappa} \equiv a_{\mu\dots\nu}^{\alpha\dots\beta} b_{\lambda\dots\varkappa}^{\gamma\dots\delta} D_\rho T_{\alpha\dots\beta\,\gamma\dots\delta}$$

и штрихами:

$$\partial_\rho = \partial_\rho' + \partial_\rho'',\quad \partial_\rho' \in V_m^n,\quad \partial_\rho'' \in V_{n-m}^n,$$

$$\overline{\overline{\nabla}}_\rho = \nabla_\rho' + \nabla_\rho'',\quad \nabla_\rho' = a_\rho^\sigma \overline{\overline{\nabla}}_\sigma,\quad \nabla_\rho'' = b_\rho^\sigma \overline{\overline{\nabla}}_\sigma,$$

$$\mathfrak{L}_\xi' T_{\alpha\dots\delta} = \xi^\rho \underline{\partial}_\rho' T_{\alpha\dots\delta} + T_{\rho\dots\delta} \underline{\partial}_\alpha' \xi^\rho + \dots + T_{\alpha\dots\rho} \underline{\partial}_\delta' \xi^\rho =$$

$$= \xi^\rho \nabla_\rho' T_{\alpha\dots\delta} + T_{\rho\dots\delta} \nabla_\alpha' \xi^\rho + \dots + T_{\alpha\dots\rho} \nabla_\delta' \xi^\rho,$$

$$\mathfrak{L}_\xi'' T_{\alpha\dots\delta} = \xi^\rho \nabla_\rho'' T_{\alpha\dots\delta} + T_{\rho\dots\delta} \nabla_\alpha'' \xi^\rho + \dots + T_{\alpha\dots\rho} \nabla_\delta'' \xi^\rho$$

$$(\nabla_\alpha' \xi^\rho = \nabla_\alpha' \xi'^\rho + \nabla_\alpha' \xi''^\rho).$$

Исходя из соотношения для частных производных

$$\partial_\alpha T_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \underline{\partial}_\alpha T_{\alpha_1\dots\alpha_m} + \sum_{k=1}^{m} T_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\rho\alpha_{k+1}\dots\alpha_m} (a_\sigma^\rho - b_\sigma^\rho)\, \partial_\alpha a_{\alpha_k}^\sigma$$

тензора T, разлагаемого при взятии подчеркнутой производной в сумму проекций

$$T_{\alpha\dots\beta} = (a_\alpha^\rho + b_\alpha^\rho) \dots (a_\beta^\sigma + b_\beta^\sigma)\, T_{\rho\dots\sigma} = a_{\alpha\dots\beta}^{\rho\dots\sigma} T_{\rho\dots\sigma} + \dots + b_{\alpha\dots\beta}^{\rho\dots\sigma} T_{\rho\dots\sigma},$$

определим индуцированное внешнее дифференцирование:

$$d\omega = \underline{d}\omega + m da \Lambda (a - b)\, \omega = \underline{d}\omega + m (L + \overline{L})\, \omega =$$

$$= \underline{\partial}_\alpha w_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} dx^\alpha \Lambda dx^{\alpha_1} \Lambda \ldots \Lambda dx^{\alpha_m} +$$

$$+ m (L_{\alpha\alpha_1}{}^\rho + \overline{L}_{\alpha\alpha_1}{}^\rho)\, w_{\rho\alpha_2 \ldots \alpha_m} dx^\alpha \Lambda dx^{\alpha_1} \Lambda \ldots \Lambda dx^{\alpha_m},$$

$$L_{\mu\nu}{}^\lambda = a^\lambda_\rho \partial_{[\mu} a^\rho_{\nu]}, \quad \overline{L}_{\mu\nu}{}^\lambda = b^\lambda_\rho \partial_{[\mu} b^\rho_{\nu]} = - b^\lambda_\rho \partial_{[\mu} a^\rho_{\nu]}.$$

Отметим, что

$$\nabla'_\alpha a_{\beta\gamma} = 0, \ \nabla'_\alpha v'_\beta = \underline{\partial}'_\alpha v'_\beta - \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} v'_\gamma, \ \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv a^{\mu\nu\gamma}_{\alpha\beta\lambda} \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda,$$

$$\nabla''_\alpha v'_\beta = \underline{\partial}''_\alpha v'_\beta - {}'\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma v'_\gamma, \ {}'\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \equiv b^\mu_\alpha a^{\nu\gamma}_{\beta\lambda} \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda,$$

$$\nabla'_\alpha v''^\gamma = \underline{\partial}'_\alpha v''^\gamma + {}''\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma v''^\beta, \ {}''\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma \equiv a^\mu_\alpha b^{\nu\gamma}_{\beta\lambda} \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda,$$

$$\nabla_\alpha v_\beta = \overline{\overline{\nabla}}_\alpha v_\beta + (H_{\alpha\cdot\beta}^{\ \gamma} + \overline{H}_{\alpha\cdot\beta}^{\ \gamma} - H_{\alpha\beta}{}^\gamma - \overline{H}_{\alpha\beta}{}^\gamma)\, v_\gamma,$$

$$H_{\alpha\beta}{}^\gamma = a^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \nabla_\mu a^\gamma_\nu = b^\gamma_\rho H_{\alpha\beta}{}^\rho, \ \overline{H}_{\alpha\beta}{}^\gamma = b^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \nabla_\mu b^\gamma_\nu,$$

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathfrak{L}'_\xi a_{\mu\nu} + \mathfrak{L}''_\xi b_{\mu\nu} - 2\xi^\lambda (N_{\mu\nu\lambda} + \overline{N}_{\mu\nu\lambda} - H_{(\mu|\lambda|\nu)} - \overline{H}_{(\mu|\lambda|\nu)}),$$

$$\mathfrak{L}'_\xi a_{\mu\nu} = \nabla'_\mu \xi_\nu + \nabla'_\nu \xi_\mu,$$

$$N_{\mu\nu}{}^\lambda = H_{(\mu\nu)}{}^\lambda = \frac{1}{2} (H_{\mu\nu}{}^\lambda + H_{\nu\mu}{}^\lambda), \ H_{\mu\nu}{}^\lambda = N_{\mu\nu}{}^\lambda + M_{\mu\nu}{}^\lambda,$$

$$L_{\mu\nu}{}^\lambda = M_{\mu\nu}{}^\lambda - \overline{H}_{[\mu\cdot\nu]}^{\ \ \lambda} + {}''\Gamma_{[\mu\nu]}^{\ \ \lambda}, \ \overline{L}_{\mu\nu}{}^\lambda = \overline{M}_{\mu\nu}{}^\lambda - H_{[\mu\cdot\nu]}^{\ \ \lambda} + {}'\Gamma_{[\mu\nu]}{}^\lambda.$$

Тензоры H, N, M естественно назвать тензорами внешней неголономности, внешней кривизны и внешнего кручения распределения V^n_m. Для инволютивного V^n_m имеем $M_{\mu\nu}{}^\lambda = 0$, для омбилического: $N_{\mu\nu}{}^\lambda = a_{\mu\nu} v^\lambda$, геодезического: $H_{\mu\nu}{}^\lambda = 0$, для минимального распределения вектор средней кривизны $k^\lambda = \frac{1}{m} H_\rho^{\cdot\rho\lambda}$ равен нулю. Условиями $\mathfrak{L}_\xi a_{\mu\nu} = 0$, $\mathfrak{L}'_\xi a_{\mu\nu} = 0$ естественно определить внешнюю (обычную) и внутреннюю (индуцированную) группу изометрии для V^n_m. При наличии в распределении m независимых векторов Киллинга (внешних или внутренних) можно говорить об однородности распределения. Для $n=4$, $m=3$ это дает определение однородности пространства, не совпадающее с определением пространственной однородности пространства-времени: очевидно, что подвижность многообразия и его частей различна. Например, пространства $t=\text{const}$ для метрики

$$ds^2 = \text{ch}^2\, ax dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

однородны, хотя пространство-время не допускает вдоль них группы движения G_3: пространственные плоскости $t=\text{const}$ не параллельны друг другу и ускорение свободного падения в соответствующей системе отсчета (система отсчета — это ортогональное пространству V^4_3 ориентированное одномерное слоение, образуемое мировыми линиями среды отсчета) менятся от точки к точке вдоль оси абсцисс. Аналогичные рассуждения приложимы к полю диад, т. е. к расщеплению

$$TV^4 = V^4_2 + V^4_2.$$

Для многообразия V^n можно поставить задачу отыскания распределения V^n_m (для каждого m отдельно), допускающего группу движения (внешнюю и индуцированную) максимально высокой размерности s_m. Числа $(s_1, \ldots\ldots, s_n)$ можно назвать жанрами (внешними и индуцированными) риманова многообразия V^n — по аналогии с некоторой характеристикой системы пфаффовых уравнений, а само распределение V^n_m — жанровым. Жанры пространства-времени характеризуют его симметрию полнее, чем обычно рассматриваемая группа G_{s_n}.

Выпишем коммутаторы для индуцированных производных:

$$\partial'_{[\mu}\partial'_{\nu]} = M_{\mu\nu}{}^{\lambda}\partial''_{\lambda}, \quad \partial''_{[\mu}\partial''_{\nu]} = \overline{M}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\partial'_{\lambda},$$

$$2\nabla'_{[\alpha}\nabla'_{\beta]}v'^{\gamma} = K_{\alpha\beta\rho}{}^{\gamma}v'^{\rho} + 2M_{\alpha\beta}{}^{\rho}\nabla''_{\rho}v'^{\gamma},$$

$$2\nabla''_{[\alpha}\nabla''_{\beta]}v''_{\gamma} = -\overline{K}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\rho}v''_{\rho} + 2\overline{M}_{\alpha\beta}{}^{\rho}\nabla'_{\rho}v''_{\gamma},$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 2\underline{\partial}'_{[\alpha}\Gamma'^{\delta}_{\beta]\gamma} + 2\Gamma'^{\ \delta}_{[\alpha\ \rho}\Gamma'^{\rho}_{\beta]\gamma} - 2M_{\alpha\beta}{}^{\rho\prime}\Gamma^{\delta}_{\rho\gamma},$$

$$\overline{K}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = 2\underline{\partial}''_{[\alpha}\Gamma''^{\delta}_{\beta]\gamma} + 2\Gamma''^{\ \delta}_{[\alpha\ \rho}\Gamma''^{\rho}_{\beta]\gamma} - 2\overline{M}_{\alpha\beta}{}^{\rho\prime\prime}\Gamma^{\delta}_{\rho\gamma},$$

$$(\Gamma''^{\gamma}_{\alpha\beta} = b^{\mu\nu\gamma}_{\alpha\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}).$$

Здесь K, $\overline{K}$ — тензоры Схоутена [4] для V^n_m, V^n_{n-m}. Уравнения Эйнштейна $G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$ в диадах имеют следующий вид:

$$K_{\mu\nu} - \nabla''_{\rho}H^{\rho}_{\mu\nu} - \nabla'_{\mu}\overline{d}_{\nu} - H^{\rho}_{\mu\cdot\sigma}H_{\rho\nu}{}^{\sigma} + H_{\mu\nu}{}^{\rho}d_{\rho} - \frac{1}{2}Ra_{\mu\nu} = -I_{\mu\nu},$$

$$\nabla'_{\rho}H^{\rho}_{\mu\cdot\nu} + \nabla''_{\rho}\overline{H}^{\rho}_{\nu\cdot\mu} - \nabla'_{\mu}d_{\nu} - \nabla''_{\nu}\overline{d}_{\mu} + 2M_{\rho\mu}{}^{\sigma}\overline{H}_{\sigma\nu}{}^{\rho} + 2\overline{M}_{\rho\nu}{}^{\sigma}H_{\sigma\mu}{}^{\rho} = -J_{\mu\nu},$$

$$\overline{K}_{\mu\nu} - \nabla'_{\rho}\overline{H}_{\mu\nu}{}^{\rho} - \nabla''_{\mu}d_{\nu} - \overline{H}^{\rho}_{\mu\cdot\sigma}\overline{H}_{\rho\nu}{}^{\sigma} + \overline{H}_{\mu\nu}{}^{\rho}\overline{d}_{\rho} - \frac{1}{2}Rb_{\mu\nu} = -\overline{I}_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu} \equiv K_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha}, \quad I_{\mu\nu} = a^{\alpha\beta}_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}, \quad J_{\mu\nu} = a^{\alpha}_{\mu}b^{\beta}_{\nu}T_{\alpha\beta},$$

$$\overline{I}_{\mu\nu} = b^{\alpha\beta}_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}, \quad d^{\lambda} \equiv H^{\cdot\rho\lambda}_{\rho}, \quad \overline{d}^{\lambda} = \overline{H}^{\cdot\rho\lambda}_{\rho}.$$

Приведем формулы Гаусса — Кодацци — Риччи:

$$a^{\mu\nu\rho\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} = K_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2H_{[\alpha|\gamma|}{}^{\rho}H_{\beta]\delta\rho},$$

$$b^{\mu\nu}_{\alpha\beta}a^{\rho\sigma}_{\gamma\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} = {}'K_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2\overline{H}_{[\alpha\cdot|\gamma|}^{\ \rho}\overline{H}_{\beta]\rho\delta},$$

$$a^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}b^{\sigma}_{\delta}R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\nabla'_{[\alpha}H_{\beta]\gamma\delta} + 2M_{\alpha\beta}{}^{\rho}\overline{H}_{\rho\delta\gamma},$$

$${}'K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \equiv 2\underline{\partial}''_{[\alpha}{}'\Gamma^{\delta}_{\beta]\gamma} + 2'\Gamma^{\ \delta}_{[\alpha\ \rho|}{}'\Gamma^{\rho}_{\beta]\gamma} - 2\overline{M}^{\rho}_{\alpha\beta}\Gamma'^{\delta}_{\rho\gamma}.$$

Для соотношения $a^{\lambda}_{\mu}\nabla_{\rho}G^{\rho}_{\lambda} = 0$ получаем равенство

$$\nabla'_{\beta}P^{\beta}_{\alpha} + \nabla''_{\beta}Q^{\cdot\beta}_{\alpha} - P^{\beta}_{\alpha}\overline{d}_{\beta} - Q^{\cdot\beta}_{\alpha}d_{\beta} + \overline{P}^{\gamma}_{\beta}\overline{H}^{\cdot\beta}_{\gamma\cdot\alpha} - Q^{\gamma}_{\cdot\beta}H_{\gamma\alpha}{}^{\beta} = 0,$$

$$(P_{\alpha\beta} \equiv a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}G_{\mu\nu}, \quad Q_{\alpha\beta} \equiv a^{\mu}_{\alpha}b^{\nu}_{\beta}G_{\mu\nu}, \quad \overline{P}_{\alpha\beta} \equiv b^{\mu\nu}_{\alpha\beta}G_{\mu\nu})$$

и равенство, ему двойственное. Разложение даламбертиана от скаляра имеет вид

$$\Box I = (\Box' + \Box'' - \overline{d}^{\rho}\partial'_{\lambda} - a^{\rho}\partial''_{\rho})\, I,$$

$$\Box \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}, \quad \Box' = g^{\alpha\beta}\nabla'_{\alpha}\nabla'_{\beta}, \quad \Box'' = g^{\alpha\beta}\nabla''_{\alpha}\nabla''_{\beta}.$$

С помощью индуцированного даламбертиана можно написать уравнение диффузии для скаляра:

$$(\square'' - t^{\rho}\partial'_{\rho}) I = 0,$$

где штрих отмечает дифференцирование вдоль времени. Скаляр I можно считать инвариантом кривизны второго или большего порядка, квадратом ковариантной производной главного вектора Римана (в некоторых случаях он имеет смысл плотности гравитационной энергии) и т. д. В этих случаях мы получаем, очевидно, описание диффузионных гравитационных процессов различного типа. Аналогичное уравнение, не сводимое к предыдущему, можно написать для распределения V^4_2. Уравнения $\square T = 0$, $\square' T = 0$ для V^4 и V^4_2, содержащего время (V^4_1), дают обычную и индуцированную волну для величины T скалярной или тензорной природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельманов А. Л. Диссертация. МГУ, 1944.
2. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
3. Зельманов А. Л. «Тезисы докладов 5-й международной конференции по гравитации и теории относительности». Тбилиси, 1965.
4. Schouten J. A., van Kampen E. R. Math. Ann., **103**, 752, 1930.

Поступила в редакцию
19.2 1971 г.

ГАИШ