Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 539.12.01 : 530.145

В. И. ХЛЕСКОВ

ПАДЕ-ПРИБЛИЖЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В работе показано, что в теории поля для некоторых моделей с фиксированным источником можно подобрать Паде-приближения низших порядков, которые строят из первых членов рядов для амплитуд этих моделей решения дисперсионного уравнения Лоу.

Паде-приближение связано с именем французского математика Паде. Это есть отношение двух полиномов, которые по известным правилам строятся из коэффициентов степенного ряда данной функции $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ так, что

$$f(z)-[N,\,M]\equiv f(z)-\frac{P_N(z)}{Q_M(z)}=z^{N+M+1}R(z)+\ldots,$$

где $R(z)$ — произвольный полином. Паде-приближение обладает рядом интересных свойств (см. [1, 2]).

Как правило, последовательные приближения $[N,\,M]$ $(N,\,M\to\infty)$ сходятся к данной функции быстрее и в большей области, чем соответствующий степенной ряд [1].

Чисхольм с успехом применил Паде-приближение к решению линейных неоднородных интегральных уравнений с вырожденными и компактными ядрами [3]. Безис и Пустерла нашли связь диагональных приближений $(N=M)$ с функциями Йоста [4]. Его использовали и для получения масс мезонных резонансов. Была также высказана идея применения этого приближения в квантовой теории поля для ряда теории возмущений S-матрицы $(S=1+gS_1+g^2S_2+\ldots)$, что должно осуществлять аналитическое продолжение метода возмущений в область больших констант связи.

В данной работе Паде-приближения строились для амплитуды модели Бялыницкого-Бируля, которая задана известным рядом по разности масс нуклонов, и для ряда возмущений амплитуды скалярной заряженности модели. Из возможных Паде-приближений низших порядков N, M были отобраны такие, которые для данных амплитуд давали наилучшее совпадение с известными для этих моделей решениями дисперсионного уравнения Лоу.

§ 1. Модель с двумя фиксированными нуклонами

Модель Бялыницкого-Бируля описывается гамильтонианом [5]

$$H = m_0 \psi^+ \psi + \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2(x) + (\bar{\nabla} \varphi(x))^2 + \mu^2 \varphi^2(x)\right] +$$

$$+ g_0 \psi^+ \tau_1 \psi \int d^3x\, \varphi(x)\, \delta(x) + \Delta m_0 \psi^+ \tau_3 \psi,$$

здесь

$$m_0 = \frac{m_0^p + m_0^n}{2}, \quad \Delta m_0 = \frac{m_0^p - m_0^n}{2}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

τ_i — матрицы Паули.

Перенормированный ряд матрицы рассеяния с разностью масс нуклонов в качестве параметра разложения был построен в работе [6]:

$$M(\omega_f) = \frac{2g^2 \delta_N \Delta m}{(2\pi)^3 \omega_f^3} \Bigl\{ 1 + (-i)\, \delta_N \Delta m \int_0^\infty dx\, (2 - 2\cos \omega_f x) \times$$

$$\times [F_1(ix, g) - 1] + (-i\delta_N \Delta m)^2 \Bigl[\int_0^\infty \int_0^\infty dx_1\, dx_2\, (3 - 2\cos \omega_f x_1 -$$

$$- 2\cos \omega_f x_2 + 2\cos \omega_f (x_1 + x_2))\, [F_1(ix_1 g) \times$$

$$\times F_1(ix_2, g)\, F_1^{-1}(ix_1 + ix_2, g) - F_1(ix_1, g) - F_1(ix_2, g) + 1] - \qquad (1)$$

$$- \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1\, dx_2\, (F_1(x_1, g)\, F_1(x_2, g)\, F^{-1}(x_1 + x_2, g) - F_1(x_1, g) -$$

$$- F_1(x_2, g) + 1) - \int_0^\infty dx \Bigl[\Bigl(3x - 2x \cos \omega_f x + \frac{4}{\omega_f} \sin \omega_f x \Bigr) \times$$

$$\times (F_1(ix, g) - 1) + 4x F_1(x, g) - 1) \Bigr] - \frac{4}{\omega_f^2} \Bigr] + \ldots \Bigr\}.$$

Здесь

$$F_1(ix, g) = \exp \Bigl\{ 2g^2 \sum_k \frac{1}{\omega^3} e^{i\omega x} \Bigr\},$$

$$\delta_N = \begin{cases} +1 & N = p \\ -1 & N = n \end{cases},$$

ω_f — энергия рассеянного мезона.

Решение уравнения Лоу для этой модели также известно и имеет вид [7]

$$\overline{M}(\omega_f) = \frac{\dfrac{\delta_N g^2}{(2\pi)^3} \Delta m}{(\omega_f^2 - \Delta m^2)\, \omega_f \left\{ 1 - \dfrac{\delta_N g^2 \Delta m}{4\pi \sqrt{\mu^2 - \Delta m^2}} \; \dfrac{\sqrt{\mu^2 - \Delta m^2} - \sqrt{\mu^2 - \omega_f^2}}{\sqrt{\mu^2 - \Delta m^2} + \sqrt{\mu^2 - \omega_f^2}} \right\}} \qquad (2)$$

с условием

$$\frac{g^2}{4\pi} < \frac{\sqrt{\mu^2 - \Delta m^2}}{\Delta m}.$$

Амплитуда $\overline{M}(\omega_f)$ удовлетворяет двухчастичному условию унитарности:

$$Im\overline{M}(\omega_f) = (2\pi)^2 k_f \omega_f |\overline{M}(\omega_f)|^2.$$

Если в ряду (1) для $M(\omega_f)$ оставить только слагаемые порядка не выше Δm^3 и выделить в отдельном виде члены, зависящие от g^4 и выше (многочастичные процессы), то

$$M(\omega_f) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{\Delta m\, \delta_N}{\omega_f^3} \left\{ 1 + \frac{g^2}{2\pi} \frac{\Delta m}{\mu} \delta_N \left(\frac{2\mu^2 - \omega_f^2}{2\omega_f^2} + \frac{i\mu k_f}{\omega_f^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \delta_N \frac{\Delta m}{\mu} I_1(\omega_f, g^4) - \Delta m^2 I_2^{(1)}(\omega_f) - \Delta m^2 I_2^{(2)}(\omega_f, g^4) + \ldots \right\}. \qquad (3)$$

Здесь $I_1(\omega_f, g^4)$ и $I_2^{(2)}(\omega_f, g^4)$ порядка g^4 и выше, а

$$I_2^{(1)}(\omega_f) = -\frac{1}{\omega_f^2} - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1\, dx_2 \,[3 - 2\cos\omega_f x_1 -$$

$$- 2\cos\omega_f x_2 + 2\cos\omega_f (x_1 + x_2)] \left(2g^2 \sum_k \frac{1}{\omega^3} e^{-i(x_1+x_2)\omega} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty dx_1\, dx_2 \left(2g^2 \sum_k \frac{1}{\omega^3} e^{-(x_1+x_2)\omega} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^\infty dx \left[\left(3x - 2x\cos\omega_f x + \frac{4}{\omega_f} \sin\omega_f x \right) \left(2g^2 \sum_k \frac{1}{\omega^3} e^{-i\omega x} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(2g^2 \sum_k \frac{1}{\omega^3} e^{-\omega x} \right) 4x \right].$$

Паде-приближение будем строить, имея явное решение уравнения Лоу (2), которое в свою очередь запишем в виде

$$\overline{M}(\omega_f) = \frac{\dfrac{g^2 \delta_N}{(2\pi)^3 \omega_f^3} \Delta m}{1 - \dfrac{\delta_N g^2}{2\pi} \dfrac{\Delta m}{\mu} \left(\dfrac{2\mu^2 - \omega_f^2}{2\omega_f^2} + \dfrac{i k_f \mu}{\omega_f^2} \right) - \dfrac{\Delta m^2}{\omega_f^2} + 0(\Delta m^3)}. \qquad (4)$$

Без учета общего множителя вся зависимость этого выражения от энергии и разности масс заключена в знаменателе, т. е. Паде-приближение не должно иметь полинома в числителе. Для ряда (3) амплитуды рассеяния, известного с точностью до Δm^2 (также без учета общего множителя), можно построить приближения [0,1] и [0,2], причем последнее будет давать совпадение с решением уравнения Лоу с точностью Δm^2, а первое — с точностью Δm. Для функции $f(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ Паде-приближение [0,2] задается формулой

$$\{f(x)\}_{[0,2]} \equiv [0,2] = \frac{1}{1 - c_1 x + (c_1^2 + c_2)\, x^2}.$$

Из (3) получаем

$$\{M(\omega_f)\}_{[0,2]} = \frac{\dfrac{g^2}{(2\pi)^3}\, \dfrac{\delta_N}{\omega_f^3}\, \Delta m}{1 - \dfrac{g^2}{2\pi}\, \dfrac{\delta_N}{\mu}\, \Delta m \left(\dfrac{2\mu^2 - \omega_f^2}{2\omega_f^2} + i\, \dfrac{\mu k}{\omega_f^2}\right) + \Delta m^2 I_2^{(1)}(\omega_f) + \Phi(\Delta m)}, \quad (5)$$

где $\Phi(\Delta m)$ зависит от g^4 и выше.

Вычисления показывают, что в $I_2^{(1)}(\omega_f)$ все интегралы взаимно уничтожаются и остается $I_2^{(1)}(\omega_f) = -1/\omega_f^2$. После подстановки в (5) убеждаемся, что в знаменателе с точностью Δm^2 и без учета многочастичных процессов $\Phi(\Delta m)$ это выражение совпадает с решением уравнения Лоу (4).

§ 2. Скалярная заряженная модель

В этой модели статический, бесспиновый нуклон взаимодействует со скалярными заряженными мезонами. Нуклон имеет две изотопические степени свободы (протон и нейтрон). T-упорядоченная S-матрица в символическом виде записывается следующим образом [8]:

$$S = T \exp\left\{- i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\alpha|t|}\, g \sum_{j=1}^{2} \tau_j(t)\, \varphi_j(t) - \delta\, m e^{-2\alpha|t|}\right] dt\right\},$$

где φ_j — операторы мезонных полей, $\tau_j(t)$ — матрицы Паули, зависящие от времени как от упорядочивающего параметра.

Амплитуда упругого рассеяния мезона из начального состояния в конечное с энергией ω_f есть

$$f_{fi}^{\beta\alpha}(\omega_f) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_f t}\, \overline{R}_{fi}^{\beta\alpha}(t)\, dt,$$

$$\overline{R}_{fi}^{\beta\alpha}(t) = \frac{\left\langle N_\beta \middle| i^2 \dfrac{\delta^2 S}{\delta\varphi_f(t)\; \delta\varphi_i(0)} \middle| N_\alpha \right\rangle}{\langle N | S | N \rangle}. \quad (6)$$

Нуклон переходит из изотопического состояния α в состояние β. Связь $f_{fi}^{\beta\alpha}(\omega_f)$ с сечением следующая:

$$\frac{1}{4\pi} |f_{fi}^{\beta\alpha}(\omega_f)|^2 = \sigma(\omega_f). \quad (7)$$

Мы хотим получить перенормированный ряд теории возмущений со слагаемыми порядка g_r^4 и, построив подходящее Паде-приближение, сравнить с решением уравнения Лоу для модели, которое было найдено Кастильего, Далицем и Дайсоном для протона [9]:

$$\overline{M}_\alpha(\omega_f) = \frac{1}{(-1)^\alpha \left(\dfrac{g_r^2}{2\pi}\right)^{-1} - \dfrac{\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_f^2}}{\omega_f}}, \quad (8)$$

$\alpha = 0$ для положительных мезонов, $\alpha = -1$ для отрицательных.

Эта амплитуда связана с сечением соотношением

$$\frac{4\pi}{\omega_f^2}\,|\,\overline{M}_\alpha(\omega_f)\,|^2=\sigma(\omega_f). \tag{9}$$

Из (6) получаем делением ряда на ряд

$$\overline{R}^{\beta\alpha}_{f_i}(t)=e^{-\alpha|t|}\Big\langle N_\beta\,|\,T\Big\{g^2\tau_f(t)\,\tau_i(0)-\frac{g^4}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^c(S_1-S_2)\times$$

$$\times\, e^{-\alpha|S_1|-\alpha|S_2|}\Big[\tau_f(t)\,\tau_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tau_j(S_1)\,\tau_j(S_2)-$$

$$-2\tau_f(t)\,\tau_i(0)\Big]\,dS_1\,dS_2\,|\,N_\alpha\Big\rangle+\dots, \tag{10}$$

где

$$\Delta^c(S_1-S_2)=\sum_k\frac{v(k)}{2\omega}\,e^{-\omega|S_1-S_2|}$$

и $v(k)$ — обрезающая функция.

Связь перенормированной и неперенормированной констант взаимодействия в этой модели известна [10, 11]:

$$g_r\langle N_\beta\,|\,\tau_j\,|\,N_\alpha\rangle=g\,\frac{\langle N_\beta\,|\,T\,\{\tau_j(0)\;S\}\,|\,N_\alpha\rangle}{\langle N\,|\,S\,|\,N\rangle}.$$

После вычислений получаем

$$g_r=g-\frac{g^3}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^c(S_1-S_2)\,e^{-\alpha|S_1|-\alpha|S_2|}\,[\varepsilon(S_1)\,\varepsilon(S_2)-1]\,dS_1\,dS_2+\dots, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon(S)=\begin{cases}+1 & S>0\\ -1 & S<0.\end{cases}$$

Зная (11) и проводя перенормировку заряда алгебраически (см. [12]), можно получить перенормированный ряд:

$$\overline{R}^{\beta\alpha}_{f_i}(t)=e^{-\alpha|t|}\langle N_\beta\,|\,T\,\{g_r^2\,\tau_f(t)\,\tau_i(0)\}\,|\,N_\alpha\rangle-$$

$$-\frac{g_r^4}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^c(s_1-s_2)\,e^{-\alpha|s_1|-\alpha|s_2|}\,e^{-\alpha|t|}\Big\langle N_\beta\Big|\,T\Big\{\tau_f(t)\times$$

$$\times\,\tau_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tau_j(s_1)\,\tau_j(s_2)-2\tau_f(t)\,\tau_i(0)\Big\}\Big|\,N_\alpha\Big\rangle\,ds_1ds_2+2e^{-\alpha|t|}\times$$

$$\times\,\langle N_\beta\,|\,T\,\{g_r^2\,\tau_f(t)\;\tau_i^{(0)}\}\,|\,N_\alpha\rangle\,\frac{g_r^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|s_1|-\alpha|s_2|}\,\Delta^c(s_1-s_2)\times$$

$$\times[\varepsilon(s_1)\,\varepsilon(s_2)-1]\,ds_1\,ds_2+\dots \tag{12}$$

Для конкретности рассмотрим рассеяние π^+ мезона на протоне. Так как

$$\varphi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \text{ и } \varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2),$$

то

$$f^{pp}_{\pi^+\pi^+}(\omega_f) = f^{pp}_{11}(\omega_f) + I_m f^{pp}_{12}(\omega_f). \tag{13}$$

Матрицы τ_1 и τ_2 антикоммутируют. Можно выписать матричные элементы для их T-произведения. Возникающие при этом произведения функций скачка упрощаются с помощью известной формулы

$$\prod_{j=1}^{n} \varepsilon(x-\xi_j) = \sum_{l=1}^{n}\Big\{\prod_{j\neq l}\varepsilon(\xi_l-\xi_j)\Big\}\varepsilon(x-\xi_l) + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

В результате

$$\overline{R}^{pp}_{11}(t) = e^{-\alpha|t|}g_r^2 - \frac{g_r^4}{2}e^{-\alpha|t|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^c(s_1-s_2)\,e^{-\alpha|s_1|-\alpha|s_2|}\times$$

$$\times[1+\varepsilon(t-s_1)\,\varepsilon(t-s_2)\,\varepsilon(s_1)\,\varepsilon(s_2) - 2\varepsilon(s_1)\,\varepsilon(s_2)]\,ds_1\,ds_2 + \ldots$$

$$\overline{R}^{pp}_{12}(t) = i\varepsilon(t)\,e^{-\alpha|t|}g_r^2 - i\varepsilon(t)\,e^{-\alpha|t|}\frac{g_r^4}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta^c(s_1-s_2)\times$$

$$\times[\varepsilon(t-s_1)\,\varepsilon(t-s_2) - \varepsilon(s_1)\,\varepsilon(s_2)]\,ds_1\,ds_2 + \ldots$$

Вычисляя Фурье-образы этих функций и подставляя их в (13), получаем амплитуду рассеяния

$$f^{pp}_{\pi^+\pi^+}(\omega_f) = \frac{2g_r^2}{\omega_f} + 4g_r^2\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^2}{k^2+\mu^2}\times$$

$$\times\frac{dk}{\left(\sqrt{\omega_f^2-\mu^2}+k+i\varepsilon_1\right)\left(\sqrt{\omega_f^2-\mu}-k+i\varepsilon_1\right)}, \tag{14}$$

здесь $v(k)=1$.

Интеграл просто вычисляется с помощью теории вычетов. Запишем окончательный результат:

$$f^{pp}_{\pi^+\pi^+}(\omega_f) = \frac{2g_r^2}{\omega_f}\left[1+\frac{g_r^2}{2\pi\omega_f}\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_f^2}\right)\right].$$

Паде-приближение [0,2], построенное для этого ряда, представляется формулой

$$\{f^{pp}_{\pi^+\pi^+}(\omega_f)\}_{[0,2]} = \frac{4\pi}{\omega_f}\frac{1}{\left(\frac{g_r^2}{2\pi}\right)^{-1} - \frac{\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_f^2}}{\omega_f}}. \tag{15}$$

Это выражение полностью совпадает с решением уравнения Лоу для положительного мезона, если учесть, что в условии унитарности для этих амплитуд стоят разные нормировочные множители (см. (7) и (9)).

Можно отсюда сделать заключение, что Паде-приближение [0,2] свертывает неунитарный ряд теории возмущений скалярной заряженной модели со слагаемыми до g^6 в решение уравнения Лоу для этой модели, которое удовлетворяет условию двухчастичной унитарности.

Применение Паде-приближения в описанных моделях указывает, что при определенном выборе степеней полиномов оно преобразует первые несколько членов известных для амплитуд этих моделей рядов в решения дисперсионного уравнения Лоу.

Выбор порядков Паде-приближения может менять вид его функциональной зависимости от энергетической переменной и от параметра разложения амплитуды в ряд.

Для данных моделей критерием отбора служил явный вид известных решений уравнения Лоу. В этом случае методом подбора можно указать Паде-приближения, которые дают прямое совпадение с решением дисперсионного уравнения. Общий критерий выбора порядка приближений не ясен. Условие унитарности, вероятно, сужало бы этот произвол. (Об унитарности Паде-приближений см. [1].)

По-видимому, Паде-приближение будет полезно в тех случаях, когда ряд теорий возмущений не способен воспроизвести особенности амплитуды рассеяния по константе взаимодействия.

В заключение выражаю благодарность Б. М. Барбашову за постановку проблемы и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Basdevant J. L. Padè approximants ORSAY, 1968.
2. Фруассар М. Вопросы теории элементарных частиц. Варна, 1968, стр. 426.
3. Chisholm J. S. R. J. Math. Phys., **7**, 39, 1966.
4. Bessis J. D., Pusterla M. Nuovo Cim., **54A**, 243, 1968.
5. Bialynicki-Birula. Nucl. Phys., **12**, 309, 1959.
6. Барбашов Б. М., Ефимов Г. В. ЖЭТФ, **40**, вып. 3, 848, 1961.
7. Барбашов Б. М., Ефимов Г. В. ЖЭТФ, **42**, вып. 2, 520, 1962.
8. Барбашов Б. М., Ефимов Г. В. ЖЭТФ, **39**, вып. 2 (8), 450, 1960.
9. Castillejo L., Dalitz R., Dyson F. Phys. Rev., **101**, 453, 1956.
10. Lee T. D. Phys. Rev., **95**, 1329, 1954.
11. Wick C. C. Rev. Mod. Phys., **27**, 339, 1955.
12. Ефимов Г. В. ЖЭТФ, **42**, вып. 6, 1558, 1962.

Поступила в редакцию
23.4 1971 г.

Кафедра
теории атомного ядра