

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1973

УДК 539.171; 621.039

В. М. КРАСНОПОЛЬСКИЙ, В. И. КУКУЛИН

СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ И ТОЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО $n-d$ -РАССЕЯНИЯ

Рассматривается низкоэнергетическое $n-d$ -рассеяние в методе резонирующих групп. Производится сравнение полученных результатов с результатами решения уравнений Фаддеева для тех же потенциалов. Делаются выводы относительно того, какие сложные системы (с $A > 3$) будут хорошо описываться методом резонирующих групп (МРГ).

Микроскопическое описание рассеяния в многочастичных системах ($A > 2$) является одним из актуальнейших вопросов современной ядерной физики. Адекватное описание рассеяния в таких системах дается уравнениями Фаддеева — Якубовского, Комарова — Поповой и других авторов [1—3], но эти уравнения пока решаются лишь для случая $A = 3$, да и то, как правило, для энергий ниже трехчастичного порога. Для более сложных систем основным микроскопическим методом является метод резонирующих групп. (В последнее время начинают также использовать в этой области метод К-гармоник [4].)

МРГ представляет собой первый член (или несколько первых членов) разложения Фешбаха с антисимметризацией [5] и поэтому является неконтролируемым приближением в том смысле, что невозможно заранее учесть вклад, даваемый в результат отбрасываемыми членами разложения. Поэтому важна любая попытка тем или иным образом очертить область применимости этого метода. Такую возможность дает трехтельная задача $n-d$ -рассеяния. Эта задача решена в настоящее время точно в формализме уравнений Фаддеева для ряда потенциалов [6, 7, 8], и поэтому сравнение этих результатов с результатами, полученными нами в МРГ для тех же потенциалов, позволяет пролить свет на ряд вопросов применимости этого метода. Далее, если для уравнений Фаддеева энергия трехчастичного порога принципиально выделена, то для МРГ она не выделена, и этот метод можно, по-видимому, с успехом применять при энергии тем выше пороговых, чем более компактными являются частицы. Так, $\alpha-\alpha$ -рассеяние хорошо описывается в МРГ до энергий 50—60 Мэв. Применение МРГ при энергиях выше пороговых оправдывается еще и тем, что, как известно [9], канал развала слабо влияет на фазы упругого рассеяния, а в основном сказывается на полном сечении рассеяния и реакций.

§ 1. Свойства обменных ядер МРГ и природа $n-d$ -взаимодействия

МРГ был сформулирован в работах [10, 11]. Суть его заключается в следующем. Если рассмотреть рассеяние частицы A , состоящей из n нуклонов, на частице B , состоящей из m нуклонов, то полная волновая функция системы запишется так:

$$\Psi(1, 2, \dots, n+m) = \hat{A} \{ \xi(1, \dots, n+m) \chi(1, \dots, n+m) \times \Phi(1, \dots, n+m) \}, \quad (1)$$

где \hat{A} — оператор антисимметризации; $\xi(1, \dots, n+m)$ — изоспиновая часть волновой функции, $\chi(1, \dots, n+m)$ — спиновая часть волновой функции, $\Phi(1, \dots, n+m)$ — орбитальная часть волновой функции.

Далее в МРГ делается следующее адиабатическое по смыслу приближение:

$$\Phi(1, 2, \dots, n+m) = \Phi_A(1, \dots, n) \Phi_B(n+1, \dots, n+m) \times \Psi(\vec{R}), \quad (2)$$

где Φ_A и Φ_B — внутренние функции невозмущенных сложных частиц A и B , а $\Psi(\vec{R})$ — функция их относительного движения. При этом подразумевается, что характеристическая частота функции относительного движения $\Psi(\vec{R})$ будет меньше соответствующих частот для внутренних функций Φ_A и Φ_B .

Уравнение движения в МРГ записывается так:

$$\langle \xi \chi \Phi_A \Phi_B | H - E | \Psi \rangle = 0. \quad (3)$$

Функция Ψ в этом уравнении берется в виде (1), а Φ в виде (2), гамильтониан системы записывается так:

$$H = -\frac{1}{2m} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \right)^2 + \sum_{ij} V_{ij}.$$

После суммирования по спиновым и изоспиновым индексам, а также интегрирования по внутренним координатам получаем из (3) интегродифференциальное уравнение для функции относительного движения $\Psi(\vec{R})$:

$$\left\{ -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right)^2 + W(R) - (E - E_1) \right\} \Psi(\vec{R}) + \int d\vec{R}' Q(R, \vec{R}') \Psi(\vec{R}') = 0, \quad (4)$$

где μ — приведенная масса, а

$$W(R) = \int \sum_{ij} V_{ij} |\Phi_A|^2 |\Phi_B|^2 d\tau_A d\tau_B.$$

прямой потенциал, описывающий усредненное взаимодействие частиц A и B как целых, $Q(\vec{R}, \vec{R}')$ — обменное ядро (обменный потенциал), обусловленное антисимметризацией волновой функции, а следовательно, связанное с принципом Паули. Вид уравнения (4) остается одним и тем же для любых частиц A и B , изменяться будут только $W(R)$ и $Q(R, \vec{R}')$.

В приложении описан использованный нами способ численного решения этого уравнения.

Если запишем разложение Фешбаха [5] для функции относительного движения в системе $n+m$ частиц

$$\Phi(1, 2, \dots, n+m) = \sum_{A,B} \hat{A}[\Phi_A \Phi_B \Psi_{AB}(\vec{R})] \quad (5)$$

и сравним это разложение с (2), то мы увидим, что формула (2) есть не что иное, как первый член разложения Фешбаха, соответствующий каналу упругого рассеяния частицы A на частице B , т. е. МРГ в своем простейшем виде (1)–(4) — это одноканальное приближение, в котором не учитывается возмущение волновых функций свободных частиц Φ_A и Φ_B в процессе рассеяния. Естественно, что МРГ описывает рассеяние компактных частиц лучше, чем рассеяние рыхлых частиц ($n-\alpha$ -рассеяние лучше, чем $n-d$ -рассеяние).

В этой связи при рассмотрении применимости МРГ большое значение приобретает принцип Паули.

Квартетное $n-d$ -рассеяние является характерным примером того, как благодаря действию принципа Паули МРГ оказывается применимым для описания рассеяния даже таких рыхлых частиц, как дейтрон. Весь характер низкоэнергетического квартетного $n-d$ -рассеяния определяется тем, что квартетный тритон запрещен принципом Паули, в связи с чем полная волновая функция $\Psi(1, 2, 3)$ будет очень мала в области перекрывания трех частиц. Как показано на рис. 1, обменное ядро уравнения (4) имеет в S -волнах длинный отталкивающий хвост (см. (6) и (7) при $l=0$), прямой же потенциал является чисто притягивающим и короткодействующим.

Таким образом, принцип Паули в этой системе проявляется через длинный отталкивающий хвост нелокального обменного взаимодействия $q_0(R, R')$, простирающийся на расстояния, в десятки раз большее, чем ядерное. Поэтому при малых энергиях налетающий нейтрон выталкивается из области взаимодействия и вследствие этого не может поляризовать дейтрон и образовывать трехчастичные состояния. Это подтверждают расчеты по уравнениям Фаддеева, где, как известно, учитываются все промежуточные трехчастичные состояния.

Дублетное $n-d$ -рассеяние в S -волнах является характерным примером системы, плохо описываемой МРГ. Когда проникновение налетающей частицы в покоящуюся не запрещено принципом Паули, то задача становится существенно неодноканальной, роль трехчастичных состояний становится значительной и упрощенный одноканальный МРГ перестает быть адекватным. В дублетной $n-d$ -системе хвост обменного взаимодействия имеет по сравнению с квартетной противоположный знак, что связано с другой симметрией волновой функции (5). Таким образом, при любых энергиях налетающий нейтрон втягивается в дейтрон, в результате чего происходит сильная поляризация последнего и появляется большой вклад локализованных трехчастичных состояний. Это подтверждается сравнением с результатами расчетов по точным

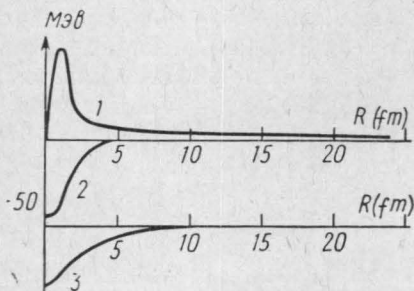


Рис. 1

трехчастичным уравнениям (см. § 3). Очевидно, аналогичная ситуация будет наблюдаться в S -волнах в синглетных n - He^3 , p - t и d - d -системах, а также в ряде других более сложных случаев. Естественно, что в этих случаях МРГ (в своем классическом виде) может быть использован лишь для получения полуколичественных оценок.

§ 2. Квартетное рассеяние

В этом разделе приведены наиболее интересные расчеты квартетного n - d -рассеяния. На рис. 2 показаны результаты, полученные в работе [6] из уравнений Фаддеева с потенциалом в виде прямоугольной ямы без отталкивания (кривая 1), и результаты, полученные нами в МРГ для того же потенциала (кривая 2).

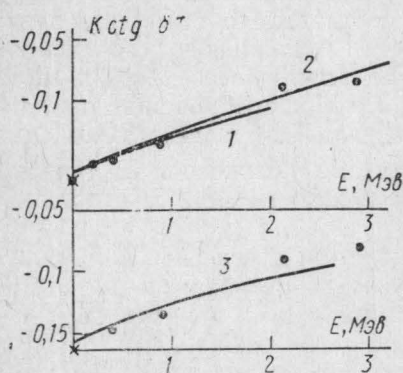


Рис. 2

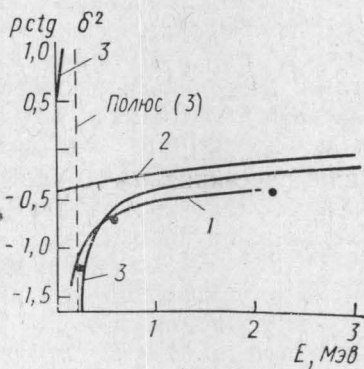


Рис. 3

Как видно, эти результаты практически совпадают вплоть до развального порога, что указывает на пренебрежимо малый вклад локализованных трехчастичных состояний. Как видно из сравнения экспериментальных и наших теоретических результатов, МРГ дает вполне удовлетворительное описание рассеяния в той области (выше трехчастичного порога), где уравнения Фаддеева с локальными потенциалами решать очень сложно. При этом мы пренебрегаем, конечно, влиянием развального канала на сечения упругого рассеяния. Нами был проведен также расчет для потенциала в виде прямоугольной ямы с твердым кором [12], который подогнан по NN -фазовым сдвигам в области энергий от нуля до 160 МэВ (с. ц. м.). Как видно из рис. 2 (кривая 3), согласие с экспериментом хорошее, но из предыдущего заранее ясно, что для хорошего описания низкоэнергетического квартетного рассеяния вводить в двухчастичный потенциал отталкивание вовсе не обязательно, поскольку нейтрон все равно его не чувствует. Приведем квартетные длины рассеяния a^4 : 6,31 получено в [6], нами получено для того же потенциала 6,35 и для потенциала с отталкиванием 6,25. Экспериментальные значения $6,14 \pm 0,6$ взяты из [13].

Как видим, МРГ с таким простым потенциалом, как обыкновенная прямоугольная яма, описывает квартетное рассеяние ничуть не хуже, чем точные трехчастичные уравнения, и притом в большей области энергий.

§ 3. Дублетное рассеяние

В этом разделе приводятся некоторые из сделанных нами расчетов дублетного n - d -рассеяния. На рис. 3 показаны результаты, полученные

в работе [6] из уравнений Фаддеева с потенциалами в виде синглетной и триплетной прямоугольных ям без отталкивания (кривая 1), и результаты, полученные нами в МРГ для тех же потенциалов (кривая 2).

Как видно из рис. 3, МРГ по сравнению с точным методом дает систематическую ошибку во всей области рассматриваемых энергий. Это указывает на большую роль, которую играют в дублетном $n-d$ -рассеянии трехчастичные процессы, не учитываемые МРГ. Нами был проведен также расчет для потенциалов в виде синглетной и триплетной прямоугольной ям с твердым кором [8], которые подогнаны по фазовым сдвигам в области энергий от нуля до 100 Мэв (кривая 3). Известный полюс $\rho \text{ctg} \delta^2$ при введении в синглетный потенциал отталкивания смещается вправо, в данном случае он сместился даже в надпороговую область. Это указывает на то, что отталкивание в синглетном потенциале слишком сильное. По-видимому, соответствующим подбором радиуса твердого кора можно добиться правильного положения полюса $\rho \text{ctg} \delta^2$, обеспечивающего дублетную длину рассеяния, близкую к эксперименту, однако, как видно из рис. 3, хорошего описания дублетной S -фазы мы при этом все равно не получим. Приведем дублетные длины рассеяния a_{Φ}^2 : 0,408 получено в [6], нами получено 2,42 для тех же потенциалов и 1,85 для потенциалов с отталкиванием. Экспериментальные значения $0,11 \pm 0,07$ взяты из [13].

Таким образом, мы видим, что МРГ (в своем классическом виде) описывает дублетное рассеяние в S -волнах неудовлетворительно.

Дифференциальное сечение $n-d$ -рассеяния складывается из сечения квартетного и дублетного рассеяния с различными весами $\sigma_i = 1/3^2 \sigma_i + 2/3^4 \sigma_i$, т. е. хорошо описываемое МРГ квартетное рассеяние дает вклад в сечение рассеяния в два раза больший, чем плохо описываемое дублетное. Итак, система с большим значением спина лучше описывается МРГ. Это, по-видимому, общая ситуация для рассеяния сложных частиц. Не говоря уже о хорошем описании рассеяния компактных частиц (типа $\alpha-\alpha$ -рассеяния), МРГ хорошо описывает также рыхлые системы в тех каналах, в которых имеются состояния, запрещенные принципом Паули по спину или изоспину. Системы в этих каналах обладают, как правило, максимальными значениями спина (изоспина), а это (благодаря большому статистическому весу этих состояний) делает их доминирующими в рассеянии. Так, низкоэнергетическое $d-d$ -рассеяние хорошо описывается МРГ [16], поскольку рассеяние со спином 2, хорошо описываемое МРГ, дает вклад, в 5 раз больший, чем плохо описываемое рассеяние с нулевым спином, $n-t$ -рассеяние в S -волнах как синглетное, так и триплетное описывается МРГ хорошо [17], так как $1S$ -связанные состояния при обоих значениях спина запрещены по изоспину.

Такие примеры можно было бы продолжить. Все это указывает на то, что точные многочастичные интегральные уравнения, когда они будут решены для системы с $A > 3$, в большом числе случаев не дадут результатов значительно лучших, чем гораздо более простой МРГ. В этих случаях при условии глубокого предварительного физического анализа задачи можно получить с помощью метода резонирующих групп вполне хорошее описание весьма сложных систем.

Приложение

Формализм МРГ для случая $n-d$ -рассеяния. Для случая $n-d$ -рассеяния формула (2) запишется так:

$$\Phi(1, 2, 3) = \Phi_1(r) \Psi(\vec{R}),$$

где $\Phi_1(\vec{R})$ — функция дейтрона, $\Psi(\vec{R})$ — функция движения нейтрона относительно центра масс дейтрона:

$$r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \quad \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) - \vec{r}_3.$$

Двухчастичный потенциал выбирался нами в виде

$$v(r_{ij}) = \begin{cases} v_0(r_{ij}) & \text{если частицы } i \text{ и } j \text{ находятся в синглетном состоянии} \\ v_1(r_{ij}) & \text{если частицы } i \text{ и } j \text{ находятся в триплетном состоянии.} \end{cases}$$

Прямой и обменный потенциалы в уравнении (4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W(R) &= 2 \int |\Phi_1(r)|^2 v_0\left(\left|\frac{1}{2}\vec{r} + \vec{R}\right|\right) d\vec{r}, \\ Q(\vec{R}, \vec{R}') &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left\{ \Phi_1(u) \Phi_1(r) \left[\left(2E_1 - \frac{3}{4}E\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4}v_1(r) - \frac{1}{4}v_1(u) + \frac{3}{4}v_1(t) \right] - \frac{1}{m} \Phi_1'(u) \Phi_1'(r) \frac{\vec{ur}}{ur} \right\}; \end{aligned} \quad (6)$$

для квартетного рассеяния:

$$\begin{aligned} W(R) &= 2 \int d\vec{r} |\Phi_1(r)|^2 v_0\left(\left|\frac{1}{2}\vec{r} + \vec{R}\right|\right), \\ Q(\vec{R}, \vec{R}') &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left\{ \Phi_1(u) \Phi_1(r) \left[\frac{1}{4}v_1(r) + \left(v_1(u) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{4}v_0(u) - \frac{3}{4}v_0(t) - \left(2E_1 - \frac{3}{4}E\right) \right] + \frac{1}{m} \Phi_1'(u) \Phi_1'(r) \frac{\vec{ur}}{ur} \right\}; \end{aligned}$$

(E_1 — энергия связи дейтрона, m — масса нуклона);
для дублетного рассеяния:

$$u = \frac{2}{3} |\vec{2R} + \vec{R}'|, \quad r = \frac{2}{3} |\vec{R} + 2\vec{R}'|, \quad t = \frac{2}{3} |\vec{R}' - \vec{R}|.$$

Редукция интегродифференциального уравнения (4) к системе алгебраических уравнений. Уравнение (4) в настоящей работе решалось следующим образом.

После разложения по парциальным волнам оно приобретает вид

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{1}{2\mu} \frac{d^2}{dR^2} + W(R) + \frac{l(l+1)}{R^2} - (E - E_1) \right\} \varphi_l(R) = \\ = 4\pi \int_0^\infty q_l(R, R') \varphi_l(R') dR', \end{aligned}$$

где

$$\varphi_l(R) = R \int \Psi(\vec{R}) Y_{lm}(\Omega_R) d\Omega_R,$$

$$q_l(R, R') = RR' \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 Q(\vec{R}, \vec{R}') P_l(x) dx,$$

$$x \equiv \frac{\vec{R}\vec{R}'}{RR'}, \quad \mu \equiv \frac{2}{3} m. \quad (7)$$

Далее, используя формализм функции Грина [14], получаем для S -волн интегральное уравнение

$$\varphi_0(R) = \sin(pR) + 4\pi \left\{ \int_0^{\infty} dR' \varphi_0(R') \left[G(R, R') W(R') - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\pi \int_0^{\infty} G(R, R'') q_0(R'', R') dR'' \right] \right\}, \quad (8)$$

$$p = \sqrt{2\mu(E - E_1)}$$

для S -волновой функции Грина имеем

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = -\frac{\mu}{2\pi p} \sin(pR_{<}) \cos(pR_{>}), \\ R_{<} = \min(R, R'), \quad R_{>} = \max(R, R').$$

Далее интегралы обрезаются на некотором расстоянии R_0 и после замены переменной $R = (R_0/2)(1+y)$ берутся по формуле гауссовских квадратур [15]:

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = \sum_{i=1}^n B_i f(y_i),$$

где веса B_i и узлы y_i берутся из квадратурных таблиц [15].

В результате уравнение (8) сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

$$\varphi_j \equiv \varphi(R_j), \quad R_j = \frac{R_0}{2}(1 + y_j);$$

$$A_{ij} = 2\pi R_0 B_j \left[G(R_i, R_j) W(R_j) - 2\pi R_0 \sum_{m=1}^n B_m G(R_i, R_m) q_0(R_m, R_j) \right] - \delta_{ij}.$$

Решение системы (9) дает нам функцию относительного движения $\varphi(R)$. Затем, выделяя ее асимптотику, получаем для $p \operatorname{ctg} \delta$ выражение

$$p \operatorname{ctg} \delta = p^2/\mu R I,$$

$$I = \sum_{i=1}^n B_i \varphi(R_i) [2\pi R_0 S - \sin(pR_i) W(R_i)],$$

$$S = \sum_{j=1}^n B_j \sin(pR_j) q_0(R_j, R_i).$$

Для решения задачи n - d -рассеяния мы выбирали параметры: $R_0 = 25 \phi$; $n = 36$. Очевидно, метод решения не зависит от сложности $q(R, R')$ и $W(R)$, т. е. пригоден для решения уравнения МРГ в случае рассмотрения рассеяния любых частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960; Труды проблемного симпозиума по физике ядра. Тбилиси, 1967; Якубовский О. А. «Ядерная физика», **5**, 1312, 1967.
2. Комаров В. В., Ророва А. М. Phys. Lett., **28B**, 476, 1969.
3. Комаров В. В., Попова А. М. ЖЭТФ, **54**, 278, 1964.

4. Жуков М. В., Эфрос В. Д. Тезисы XXI Всесоюзного совещания по ядерной спектроскопии, ч. 2, 1971, стр. 240; Пермяков В. П., Пустовалов В. В., Фенин Ю. И., Эфрос В. Д. Там же, ч. 2, 1971, стр. 247.
5. Feshbach H. Ann. Phys., **19**, 287, 1962.
6. Grayshaw D. D., Buck V. Phys. Rev. Lett., **24**, 733, 1970.
7. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Препринт, ИТФ—69—72.
8. Харченко В. Ф., Шадхин С. А. Препринт, ИТФ—70—92.
9. Darriulat P., Igo G., Pugh H. G., Holmgren H. D. Phys. Rev., **137**, B315, 1965.
10. Wheeler I. A. Phys. Rev., **52**, 1083, 1937.
11. Buckingham V. A., Massay M. S. W. Proc. Roy. Soc., **179**, 23, 1941.
12. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», **11**, 1112, 1970.
13. Van Oers W. T. H., Seagrave J. D. Phys. Lett., **24B**, 562, 1967.
14. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., 1969.
15. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966.
16. Thompson D. R. Nucl. Phys., **A143**, 304, 1970.
17. Hackenbroich H. H., Heiss P. Preprint, Institut für Theoretische Physik Universität Köln.

Поступила в редакцию
3.8 1971 г.

НИИЯФ