

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1973

В. М. БЕРЕЗИН, В. В. ГУСЕВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПОЛИДИСПЕРСНОГО АЭРОЗОЛЯ

В работе предложен общий метод получения аналитического выражения индикатрисы рассеяния для полидисперсного аэрозоля, характеризуемого гамма-распределением с произвольным целым параметром μ . Подробно обсуждены две основные характеристики индикатрисы: величина главного лепестка и его ширина. Получена общая связь этих характеристик для полидисперсного и монодисперсного аэрозолей. Дано общее выражение их через параметр μ . Полученные результаты имеют значение для исследования особенностей рассеяния радиации на аэрозоле.

При работе с лазерами очень важное значение приобретает изучение рассеяния видимой и инфракрасной радиации на атмосферном аэрозоле. Это рассеяние зависит от размеров, химического состава и концентрации частиц аэрозоля. В силу того что концентрация примесей в каплях облаков и туманов незначительна (для наиболее загрязненных облаков она не превышает 1%), обычно полагают, что аэрозольные частицы состоят из чистой воды с соответствующим показателем преломления.

Важнейшей характеристикой рассеяния радиации на аэрозолях является нормированная индикатриса рассеяния, которая для обычного случая рассеяния на сферических каплях имеет вид

$$\kappa(\beta) = \frac{I(\beta)}{2\pi \int_0^{\pi} I(\beta) \sin \beta d\beta}, \quad (1)$$

где $I(\beta)$ — интенсивность рассеянной радиации в направлении полярного угла β , отсчитываемого от направления падающей радиации. В такой форме $\kappa(\beta)$ называется индикатрисой монодисперсной среды. Для случая полидисперсных сред, т. е. сред, составленных из совокупности сферических капель различного размера, следует использовать усредненную индикатрису:

$$\kappa_m(\beta) = \frac{\bar{I}(\beta)}{2\pi \int_0^{\pi} \bar{I}(\beta) \sin \beta d\beta}, \quad (2)$$

где усреднение $I(\beta)$ проводится по всем возможным значениям размера капель, т. е.

$$\bar{I}(\beta) = \int_0^{\infty} I(\beta, a) f(a) da, \quad (3)$$

причем $\int_0^{\infty} f(a) da = 1$, а $f(a)$ — является функцией распределения капель по размерам. Анализ экспериментальных данных показывает, что эта функция хорошо аппроксимируется гамма-распределением [1]:

$$f(a) = \frac{1}{\mu!} \mu^{\mu+1} \frac{a^{\mu}}{r^{\mu+1}} e^{-\mu(a/r)}, \quad (4)$$

где r — наиболее вероятное значение размеров капель, μ — параметр. Обычно μ целое число, причем $1 \leq \mu \leq 10$ (рис. 1). Аналитических выражений индикатрис рассеяния для полидисперсного аэрозоля известно относительно немного [2, 3].

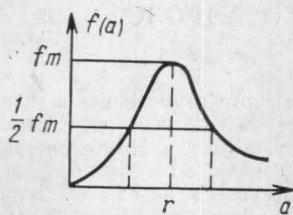


Рис. 1. Типичная кривая распределения $f(a)$ по размерам частиц водяных облаков

Наиболее полно индикатриса полидисперсного аэрозоля представлена в [4], где приведены результаты численных вычислений с помощью ЭВМ с использованием точных формул для μ . Однако для параметра распределения в (4) $\mu=6$, что соответствует радиационным туманам, согласно [5]. Таким образом, использовано значительно более узкое распределение, что не совсем оправдано.

Попытаемся получить аналитическую формулу для индикатрисы рассеяния полидисперсного аэрозоля, пригодную для практических расчетов. Согласно [5] $\mu=1, 2, 3$ и $r=5 \div 6$ мкм, что соответствует большим прозрачным частицам, охватывающим все облачные системы. Для указанного значения r и видимой области спектра радиации ρ_0 , равное $2\pi r/\lambda$, заключено в интервале $40 \leq \rho_0 \leq 90$.

Остановимся более подробно на свойстве гамма-распределения (4). Основная масса вероятности сосредоточена вблизи $a \sim r$; значения $a \ll r$ будут маловероятны. Согласно известному принципу практической невозможности маловероятных событий [6] значения a , характеризующиеся малой вероятностью, практически не реализуются. Практически за исходную вероятность обычно принимают $P=0,95$. Это означает следующее:

$$P(a \geq a_0) = \int_{a_0}^{\infty} f(a) da = e^{-x_0} \sum_0^{\mu} \frac{x_0^n}{n!} = 0,95, \quad (5)$$

$x_0 = (a_0/r)\mu$ (для целых μ). Из (4) следует, что наименьшее значение a будет при $\mu=1$, $a_0 \approx 0,3r$. Следовательно, $\rho_{\min} \approx 0,3 \rho_0 \gg 1$, в соответствии с [7] интенсивность рассеяния можно представить в виде двух слагаемых $I = I_1 + I_2$, где I_1 — определяется геометрической оптикой:

$$I_1 = \frac{I_0}{8R^2} \tau(\beta) a^2, \quad (6)$$

$\tau(\beta)$ — часть индикатрисы, соответствующая геометрической оптике, рассчитанная в [7] с шагом $\Delta\beta = 5^\circ$ для $m = 1,33$ (что соответствует показателю преломления в воде для красной линии $\lambda = 0,656$ мкм при $t^\circ = 20^\circ\text{C}$); I_2 — описывает дифференционную картину при рассеянии:

$$I_2 = \frac{I_0}{4R^2} \frac{(1 + \cos \beta)^2}{\sin^2 \beta} a^2 J_1^2(\rho \sin \beta), \quad (7)$$

где I_0 — интенсивность падающего излучения, $J_1(x)$ — функция Бесселя. А так как эти величины используются для дальнейшего осреднения по ρ , то интерференцией с самого начала можно пренебречь [7]. Для вычисления средней индикатрисы $\kappa_m(\beta)$ воспользуемся формулами (2) — (4) и (6), (7), причем при интегрировании по a нижний предел в (3) может быть положен равным нулю. Тогда

$$\bar{I}_1 = \frac{I_0}{R^2} r^2 \frac{(\mu + 1)(\mu + 2)}{8\mu^2} \tau(\beta) \quad (8)$$

При вычислении \bar{I}_2 воспользуемся [8]. В результате \bar{I}_2 может быть выражено через производные полных эллиптических интегралов первого $K(k)$ и второго $E(k)$ рода:

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \frac{I_0}{R^2} (-1)^{\mu+1} \frac{1}{16\pi} \frac{(1 + \cos \beta)^2}{\sin^2 \beta} \frac{\xi^{\mu+1}}{q^{2\mu+1}} \frac{\partial^\mu}{\partial \xi^\mu} \times \\ &\times \left\{ \frac{k^3}{1 - k^2} [(1 - 2k^2) E(k) + (1 - k^2) K(k)] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\xi = \frac{\mu}{r}, \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta, \quad k^2 = \frac{4q^2}{\xi^2 + 4q^2},$$

для частного случая $\mu = 1, 2, 3$;

$$\bar{I}_2 = \frac{I_0}{R^2} r^2 \frac{2}{\pi} \frac{\rho_0^2}{k^2 \mu^4 \mu!} (1 - k^2)^{3/2} (1 + \cos \beta)^2 \sum_0^{\mu+1} [A_{2n} E(k) + B_{2n} K(k)] k^{2n}. \quad (10)$$

	A_0	A_2	A_4	A_6	A_8	B_0	B_2	B_4	B_6	B_8
При $\mu = 1$	-3	13	-8	0	0	3	-7	4	0	0
При $\mu = 2$	-12	90	-120	48	0	12	-51	63	-24	0
При $\mu = 3$	-60	693	-1497	1272	-384	60	-408	816	-660	192

Значения коэффициентов A_{2n} и B_{2n} приведены в таблице. При вычислении нормирующего множителя в (2), т. е. величины $2\pi \int_0^\pi \bar{I}(\beta) \sin \beta d\beta$, учтем, что согласно [7] и в соответствии с (3) и (4):

$$2\pi \int_0^\pi \bar{I}_1(\beta) \sin \beta d\beta = \frac{I_0}{R^2} \pi \bar{a}^2 = \frac{I_0}{R^2} \pi r^2 \frac{(\mu + 1)(\mu + 2)}{\mu^2}. \quad (11)$$

При интегрировании \bar{I}_2 по поверхности единичной сферы воспользуемся [8] и сначала проведем интегрирование по β . В результате получим

$$\int_0^\pi I(\beta) \sin \beta d\beta = \frac{I_0}{R^2} r^2 \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{\mu^2} \left[1 - \frac{\mu}{2\rho_0(\mu+2)} + \dots \right]. \quad (12)$$

Для рассматриваемого случая $\rho_0 \gg 1$ при построении индикатрисы можно вполне с хорошим приближением положить

$$\int_0^\pi \bar{I}(\beta) \sin \beta d\beta = \frac{I_0}{R^2} r^2 \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{\mu^2}. \quad (13)$$

Используя (8), (10) и (13), запишем среднюю индикатрису для полидисперсного аэрозоля в виде

$$\begin{aligned} \kappa_m(\beta) = & \frac{1}{16\pi} \left\{ \tau(\beta) + \right. \\ & + \frac{16}{\pi} \frac{\rho_0^2}{k^2 \mu^2 (\mu+2)!} (1-k^2)^{3/2} \times \\ & \left. \times (1+\cos \beta)^2 \sum_0^{\mu+1} [A_{2n} E(k) + B_{2n} K(k)] k^{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Представим индикатрису $\kappa_m(\beta)$ для $\mu=1, 2, 3$ в прямоугольной системе координат (рис. 2 и 3). (Масштаб на рис. 3 относится к кривым 4, 5, 6, кривая 7 имеет масштаб, в 10 раз больший. Кривые 1, 2, 3 на рис. 2 имеют увеличенный в 30 раз по оси абсцисс и уменьшенный в 1000 раз по оси ординат масштаб.)

В области больших углов ($55-180^\circ$), как показано на рис. 3 (кривая 7), различие в параметрах μ и r не существенно, так как в этой области углов основной вклад в индикатрису дает член $\tau(\beta)$, описывающий геометрическую оптику.

Изменение масштабов явно показывает, что рассеянный свет в основном локализован в области малых углов, т. е. индикатриса сильно вытянута вперед и имеет малую ширину. Максимум под углом 140° соответствует первой радуге.

Особый интерес представляет характеристика главного лепестка индикатрисы. Она характеризуется двумя величинами: максимальным значением $\kappa_m(0)$ и шириной главного лепестка Δ_m ; $\kappa_m(0)$ можно получить как непосредственно из (14), так и из (2), (7), (8) и (13), полагая в них $\beta=0$.

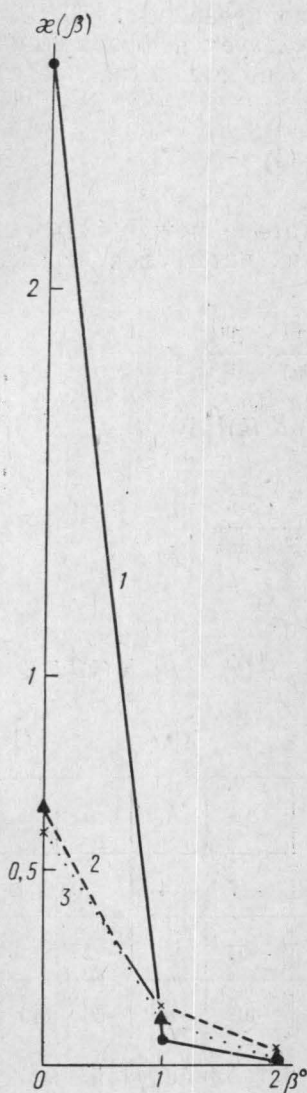


Рис. 2. Индикатриса рассеяния $\kappa_m(\beta)$, кривые 1, 2, 3 изображают индикатрису на участке $0-2^\circ$: 1 — для $\mu=1$, $r=6$ мкм; 2 — для $\mu_2=2$, $r=5$ мкм; 3 — для $\mu=3$, $r=6$ мкм

В результате получаем

$$\kappa_m(0) = \frac{1}{16\pi} \left[\tau(0) + 2\rho_0^2 \frac{(\mu+3)(\mu+4)}{\mu^2} \right].$$

Для сравнения приведем значения индикатрисы в максимуме для монодисперсного аэрозоля:

$$\kappa(0) = \frac{1}{16\pi} [\tau(0) + 2\rho^2].$$

Поэтому в случае $2\rho_0^2 \gg \tau(0)$ и $2\rho^2 \gg \tau(0)$ приближенно с очень хорошей точностью можно пренебречь $\tau(0)$. Тогда

$$\kappa_m(0) \approx \frac{\rho_0^2}{8\pi} \frac{(\mu+3)(\mu+4)}{\mu^2}, \quad (15)$$

$$\kappa(0) \approx \frac{\rho^2}{8\pi}. \quad (16)$$

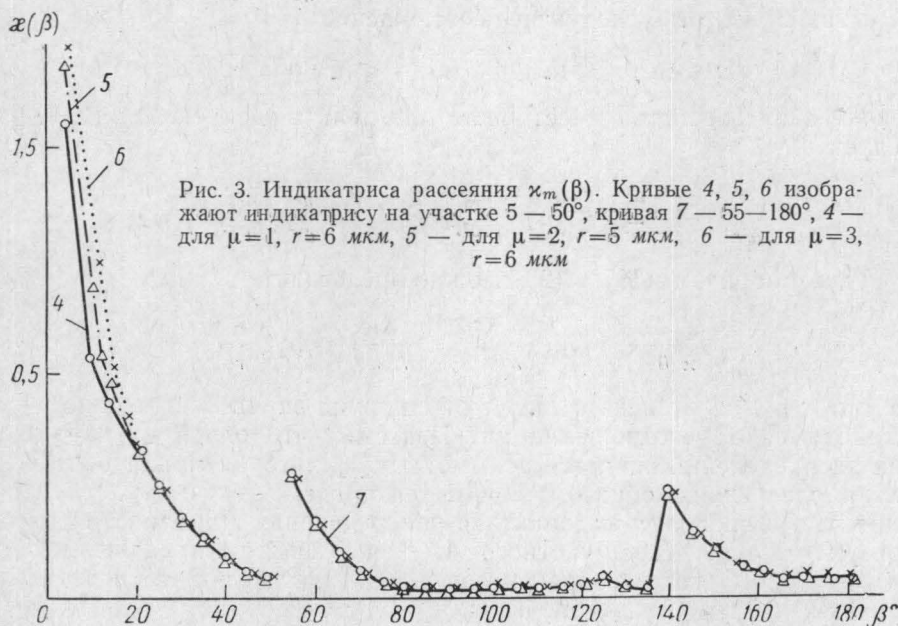


Рис. 3. Индикатриса рассеяния $\kappa_m(\beta)$. Кривые 4, 5, 6 изображают индикатрису на участке $5-50^\circ$, кривая 7 — $55-180^\circ$, 4 — для $\mu=1$, $r=6$ мкм, 5 — для $\mu=2$, $r=5$ мкм, 6 — для $\mu=3$, $r=6$ мкм

Сравнивая (15) и (16), при $\rho=\rho_0$ получим

$$\kappa_m(0) = \frac{(\mu+3)(\mu+4)}{\mu^2} \kappa(0). \quad (17)$$

Итак: $\kappa_m(0)/\kappa(0)$ при $\mu=1$ равно 20, при $\mu=2-7,5$ и при $\mu=3-4,7$.

В качестве меры ширины главного лепестка индикатрисы возьмем значение радиуса кривизны индикатрисы в области ее максимума, т. е.

$$\Delta_m = \sqrt{-\frac{\kappa_m(0)}{\kappa_m''(0)}}, \quad \Delta = \sqrt{-\frac{\kappa(0)}{\kappa''(0)}},$$

где дифференцирование производится по β . Аналогично $\kappa_m(0)$ и $\kappa(0)$ при $\rho_0 \gg 1$, Δ_m и Δ с большой точностью не зависят от $\tau(0)$. В результате из (14) или из (2) и (7) при $\rho=\rho_0$ получаем

$$\Delta_m = \frac{\mu}{V(\mu+5)(\mu+6)} \Delta, \quad (18)$$

где $\Delta \approx V\sqrt{2/\rho_0}$.

Следовательно при всех $\mu \neq 0$ $\Delta_m < \Delta$. Итак: Δ_m/Δ при $\mu=1$ равно 0,154, при $\mu=2$ — 0,253, при $\mu=3$ — 0,354.

Причина различия параметров главного лепестка полидисперсного и монодисперсного аэрозолей определяется одним общим свойством распределения $f(a)$. Для того чтобы это было ясно, представим (18), (17) $\kappa_m(0)$ и Δ_m в следующем виде:

$$\kappa_m(0) = \kappa(0) \frac{\bar{a}^4}{r^2 \bar{a}^2}, \quad (19)$$

$$\Delta_m^2 = \Delta^2 \frac{\bar{a}^4 r^2}{\bar{a}^6}. \quad (20)$$

Для совершенно произвольных распределений при существовании моментов [9] известно следующее соотношение:

$$\bar{a} \leq (\bar{a}^2)^{1/2} \leq (\bar{a}^3)^{1/3} \leq (\bar{a}^4)^{1/4} \leq (\bar{a}^5)^{1/5} \leq (\bar{a}^6)^{1/6}. \quad (21)$$

Причем знак равенства имеет место для дельта-распределения. Отсюда следует

$$\frac{\bar{a}^4}{\bar{a}^2 r^2} > \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}^2} \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2, \quad \frac{\bar{a}^6}{\bar{a}^4 r^2} > \sqrt{\frac{\bar{a}^4}{\bar{a}^2} \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}^2} \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2}.$$

Таким образом, (19) и (20) можно представить в виде

$$\frac{\kappa_m(0)}{\kappa(0)} = \beta_1 \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2, \quad \left(\frac{\Delta_m}{\Delta}\right)^2 = \beta_2 \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2,$$

где $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 1$. Степень отличия от единицы определяется видом $f(a)$. Остановимся на соотношении \bar{a}/r . Известно, что одной из характеристик распределений является асимметрия [7], которая может быть определена следующим образом: $\alpha = (\bar{a}-r)/\sigma$, где σ — стандарт распределения. Встречающиеся на практике распределения ([5] и рис. 1) характеризуются $\alpha > 0$. Для частного случая гамма-распределения $\bar{a}/r = (\mu+1)/\mu > 1$. Таким образом, во всех практически встречающихся случаях $\kappa_m(0) > \kappa(0)$, $\Delta_m < \Delta$.

В случае гамма-распределения при $\mu \rightarrow \infty$ $f(a) \rightarrow \delta(a-r)$ и, следовательно, $\kappa_m(0) \rightarrow \kappa(0)$, $\Delta_m \rightarrow \Delta$. Для несимметричных распределений с $\alpha < 0$ ($f(a)$ (полагая более при малых, чем при больших a) соотношения между $\kappa_m(0)$ и $\kappa(0)$, Δ_m и Δ будут зависеть от конкретного вида распределения, в частности, возможны также случаи, когда $\kappa_m(0) < \kappa(0)$ и $\Delta_m > \Delta$.

В [7] показано, что асимптотические формулы (6) и (7) достаточно хорошо выполняются при $\rho \geq 50$ для всей области значений $0 \leq \beta \leq \pi$. Для меньших значений ρ точность указанных формул ухудшается. При рассеянии света на больших каплях обычно основной интерес с точки зрения индикатрисы представляет ее главный лепесток. По этому же вопросу в [7] указано, что формулы (6) и (7) для главного лепестка индикатрисы имеют высокую точность для значительно меньших значений $\rho \geq 10 \div 15$ (для $r \sim 5 \div 6$ мкм это соответствует $\lambda \sim 2 \div 3$ мкм, т. е. инфракрасной области спектра рассеиваемой радиации).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Л. М. «Изв. АН СССР», сер. геофизич., № 10, 1211, 1958.
2. Шифрин К. С., Раскин В. Ф. Атмосферная индикатриса, соответствующая распределению Юнге. Средняя индикатриса для гамма-распределения. «Труды ГГО», вып. 109, 1961.
3. Шифрин К. С., Чаянова Э. А. Индикатриса для распределения Юнге и типа Юнге. «Труды ГГО», вып. 170, 1965.
4. Deirmendjian. Electromagnetic scattering on spherical polydispersions. N. Y., 1969.
5. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М., 1970.
6. Романовский В. Математическая статистика. М., 1938.
7. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. М., 1951.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1., М., 1949.
9. Гнеденко Б. В. Курс теорий вероятностей. М., 1954, стр. 179.

Поступила в редакцию
6.8 1971 г.

Кафедра
физики атмосферы