Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 538.56

А. И. КОСТИЕНКО, А. Ф. КОРОЛЕВ

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ МАЗЕРА НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ

Квазиклассическим методом с использованием принципа соответствия в теории излучения вычисляется мощность излучения мазера на циклотронном резонансе. Полученная для мощности излучения формула позволяет установить зависимость ее от мощности электронного пучка, движущегося в области однородного магнитного поля, расстройки между частотой генерируемого излучения и циклотронной частотой, угла между вектором скорости электронов и вектором напряженности магнитного поля, а также абсолютного значения скорости электронов.

Введение

Важной задачей теории мазеров на циклотронном резонансе является получение расчетной формулы для мощности излучения, в которую входили бы величины, измеряемые на практике. В настоящее время такой формулы, полученной чисто аналитическим путем, в литературе не имеется.

Нам представляется, что наиболее целесообразно подходить к решению этой задачи квазиклассически, используя результаты и классической и квантовой теории, на основе принципа соответствия. Это позволяет, не поступаясь строгостью изложения, более ясно представлять роль отдельных величин, входящих в найденные выражения, и находить целесообразные упрощения полученных формул.

Согласно принципу соответствия в теории излучения [1] квантовая излучающая (поглощающая) система может быть описана совокупностью классических осцилляторов, амплитуды колебаний которых могут быть найдены методами квантовой механики. Как указано в [1], квантовые переходы с поглощением и с индуцированным излучением имеют аналогию в классической теории: осциллятор, находящийся в поле излучения, может как поглощать, так и излучать энергию в зависимости от соотношения фаз его колебаний и электромагнитной волны.

В работе [2] исследование вопросов, связанных с индуцированным излучением, также приводит к заключению о возможности индуцированного излучения классическими системами, содержащемуся в [1].

В работах [3] и [4] приведен квантовомеханический расчет мощности вынужденного излучения и поглощения электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле. На основе полученных результатов авторы приходят к выводу о возможности преобладания при определенных условиях индуцированного излучения над поглощением для таких систем. Однако формулы для мощности синхротронного излучения электронов, полученные в этих работах, не могут быть непосредственно использованы для количественной оценки мощности мазеров на циклотронном резонансе.

В работе [5] проведен анализ взаимодействия непрямолинейного электронного пучка (трохоидального и спирального) с электромагнитными волнами в линиях передачи и получены дисперсионные уравнения для систем с такими пучками. Рассмотрение различных механизмов взаимодействия таких пучков с электромагнитными волнами показывает, что усиление и генерация СВЧ-излучения возможны в системах с незамедленными волнами. Анализ процессов группировки электронов в поле излучения дан в работе [6].

Исследовалось также [7] нелинейное взаимодействие электронов, движущихся по винтовым траекториям, с электромагнитным полем большой амплитуды при условии приближенного резонанса частоты сигнала с циклотронной частотой (или ее гармониками). Анализируя результаты численного решения этой задачи на вычислительной машине, авторы находят соотношения между пусковым и рабочим токами пучка, при которых может быть получен максимальный к. п. д.

В работах [8—11] содержатся количественные данные (пусковой ток, проводимость, условия самовозбуждения, частоты генерации и др.) для различных моделей циклотронных мазеров.

В работах [12] и [13] исследовались изменения амплитуд и фаз возбужденных нелинейных осцилляторов с квадратичной нелинейностью и собственными потерями при воздействии на них внешней гармонической силы; найдены условия, при которых осуществляется передача энергии от осцилляторов внешнему полю.

Несмотря на большое количество работ по теории мазеров на циклотронном резонансе, вопрос о получении расчетных формул для мощности излучения мазеров на циклотронном резонансе продолжает оставаться актуальным.

Теория

Оценку мощности циклотронного мазера можно произвести квазиклассическим методом. Частоты осцилляторов ω_{mn}, как известно, образуют матрицу:

$$\frac{W_n - W_m}{\hbar} = \omega_{mn},$$

где W_m и W_n — значения энергий начального и конечного уровней квантовой системы, между которыми происходят переходы. Очевидно, что

$$\frac{W_n - W_m}{\hbar} = \begin{cases} \omega_{mn} = |\omega_{mn}| \text{ при } W_n > W_m \\ \omega_{nm} = -|\omega_{mn}| \text{ при } W_n < W_m, \end{cases}$$

т. е. переходам с поглощением соответствуют положительные частоты, а переходам с излучением — отрицательные.

Если такая система взаимодействует с электромагнитной волной

$$E = E_0 \cos \omega t,$$

то осцилляторы совершают вынужденные колебания, описываемые уравнением вида

$$m_0\ddot{\xi}+m_0\gamma_{mn}\dot{\xi}+\omega_{mn}^2\xi=feE_0\cos\omega t, \tag{1}$$

где ξ — смещение электрона из положения равновесия, e, m_0 — заряд и масса электрона, $\gamma_{mn}=\left[\frac{1}{\tau}\right]$ — коэффициент затухания осциллятора, f — сила осциллятора для данного перехода.

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\xi=\frac{feE_0\cos(\omega t-\varphi)}{m_0Z},$$

где

$$z=\sqrt{(\omega_{mn}^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_{mn}^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega\gamma_{mn}}{\omega_{mn}^2-\omega^2}.$$

Мощность, передаваемая волной осциллятору, равна

$$P=eE\dot{\xi}. \tag{2}$$

Подставляя $\dot{\xi}$ и E в (2), получим

$$P=\frac{f\omega^2e^2\gamma_{mn}E_0^2}{2m_0z_{mn}^2}-\frac{f\omega e^2E_0^2}{2m_0z_{mn}}\sin(2\omega t-\varphi). \tag{3}$$

Первое слагаемое в выражении (8) представляет собой активную мощность, второе слагаемое — реактивную мощность.

Пусть имеется N_n осцилляторов на уровне W_n. Переходы на вышележащие уровни $W_{n'}$ будут сопровождаться поглощением, а переходы на нижележащие уровни $W_{n''}$ — излучением. Для активной составляющей полной мощности получим

$$P_{nn''}^{nn'}=\frac{\omega^2e^2\gamma E_0^2}{2m_0}\left\{\frac{f_{nn'}N_n}{z_{nn'}^2}+\frac{f_{nn''}N_n}{z_{nn''}^2}\right\} \tag{4}$$

(индекс у γ_{mn} опущен).

Частоту переходов можно определить, исходя из выражения для полной энергии:

$$W=\sqrt{m_0^2c^4+c^2p^2}, \tag{5}$$

где p — импульс частицы, c — скорость света. В случае мазеров на циклотронном резонансе кинетическая энергия электрона много меньше его собственной энергии и имеет место соотношение

$$\frac{p^2}{m_0^2c^2}=\frac{\frac{p^2}{m_0}}{m_0c^2}\ll 1.$$

В таком случае выражение (5) можно представить первыми тремя членами разложения в ряд Тейлора:

$$W=m_0c^2+\frac{p^2}{2m_0}\left(1-\frac{p^2/2m_0}{2m_0c^2}\right). \tag{6}$$

Величина $p^2/2\,m_0$ в (6) соответствует энергии электрона при малых скоростях. Предположим сначала, что p представляет собой импульс, связанный с чистым вращением электрона вокруг направления магнитного поля, которое в случае малых энергий совершается с циклотронной частотой Ω, определяемой выражением

$$\Omega = \frac{eH}{m_0 c},$$

где H — напряженность однородного магнитного поля. Следовательно, энергию $p^2/2m_0$ гармонического осциллятора (без учета нулевой энергии, которая здесь не играет роли) можно представить в виде

$$W_k = p^2/2m_0 = n\hbar\Omega. \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Тогда энергия электрона (6), которую мы обозначим через W_n, запишется в виде

$$W_n = m_0 c^2 + n\hbar\Omega\left(1 - \frac{n\hbar\Omega}{2m_0 c^2}\right).$$

Таким образом, вращающийся в магнитном поле электрон представляет собой ангармонический осциллятор. Аналогичные выражения получены в работах [3] и [4].

Наиболее интенсивными являются переходы $W_n \to W_{n+1}$ и $W_n \to W_{n-1}$, и в дальнейшем только они будут учитываться. Соответствующие им частоты можно определить выражениями (по абсолютной величине):

для излучения:

$$\omega_{n,n-1} = |W_{n-1} - W_n|/\hbar = \Omega\left\{1 - \frac{\hbar\Omega}{2m_0 c^2}(2n-1)\right\};$$

для поглощения:

$$\omega_{n,n+1} = |W_{n+1} - W_n|/\hbar = \Omega\left\{1 - \frac{\hbar\Omega}{2m_0 c^2}(2n+1)\right\}.$$

Силы осцилляторов в соответствии с [12] могут быть записаны в виде

$$f_{n,n+1} = \frac{\omega_{n,n+1}}{\Omega}(n+1), \quad f_{n,n-1} = -\frac{\omega_{n,n-1}}{\Omega} n.$$

Подставляя найденные значения в формулу (4) и полагая $N_n = 1$, для мощности излучения одного электрона на одной компоненте по поляризации (компоненте линейной поляризации) будем иметь

$$P_{\substack{n,n-1\\ n,n+1}} = \frac{e^2 E_0^2 \omega^2 \gamma}{2m_0\Omega}\left\{\frac{\omega_{n,n+1}}{Z^2_{n,n+1}} + n\left(\frac{\omega_{n,n+1}}{z^2_{n,n+1}} - \frac{\omega_{n,n-1}}{Z^2_{n,n-1}}\right)\right\}. \tag{7}$$

Если в реальных условиях работы циклотронного мазера $n \gg 1$, то значения частот $\omega_{n,n+1}$ и $\omega_{n,n-1}$ всюду, где они входят в виде множителей, произведений, отношений и сумм (но не разностей), можно полагать равными

$$\omega_{n,n\pm1} \cong \omega_n = \Omega\left(1 - \frac{n\hbar\Omega}{m_0 c^2}\right). \tag{8}$$

Поскольку значения частот $\omega_{n,n+1}$ и $\omega_{n,n-1}$ близки к ω, для тех же условий можно принять

$$(\omega_{n,n\pm1} + \omega)^2 \cong 4\omega^2. \tag{8'}$$

С учетом (8) выражение (7) можно записать следующим образом:

$$P_{\substack{n_1 n-1 \\ n_1 n+1}} \cong \frac{e^2 E_0^2 \tau}{2m_0 (1 + x^2)} \frac{\omega_n}{\Omega} \left[1 + 2\tau\beta_\perp^2 \frac{\Omega^2}{\omega} \frac{x}{1+x^2} \right], \tag{9}$$

где

$$x = 2\tau(\omega_n - \omega), \quad \tau = \frac{1}{\gamma},$$

и

$$\beta_\perp = \frac{v_\perp}{c} = \sqrt{2 \frac{n\hbar\omega_n}{m_0 c^2}}. \tag{9'}$$

Здесь $v_\perp$ — поперечная скорость в магнитном поле.

Оценим второй член выражения (9). Функция $x/1+x^2$ имеет максимум при $|x|=1$. При $x=-1$ эта функция имеет максимальное отрицательное значение и может значительно превышать (по модулю) единицу. В этом случае мощность взаимодействия становится отрицательной, т. е. будет иметь место индуцированное излучение.

Для оценки второго члена выражения (9) заметим, что согласно (9′) кинетическая энергия электрона $W_\perp$ (без учета ангармоничности) связана с $\beta_\perp^2$ соотношением

$$W_\perp = n\hbar\omega_n = \frac{m_0 c^2 \beta_\perp^2}{2}.$$

Пусть $\tau = \frac{L}{v_\parallel}$, где L — длина пролета электрона в однородном магнитном поле вдоль направления вектора $\vec{H}$, а $v_\parallel$ — компонент скорости электрона, направленный вдоль $\vec{H}$. Тогда второй член выражения (9) принимает вид

$$f(x) = \frac{4W_\perp L}{m_0 c^2 v_\parallel} \frac{\Omega^2}{\omega} \frac{x}{1+x^2}.$$

Полагая $x=1$, $H=10^4$ *эрст*, $W_\perp=10^4$ *эв*, $L=20$ *см*, получим $f(x) = 20\frac{\Omega}{\omega}$. В этих условиях первым членом выражения (9) можно пренебречь по сравнению с его вторым членом и определить мощность индуцированного излучения одного электрона формулой

$$P_{\substack{n_1 n-1 \\ n_1 n+1}} = \frac{e^2 E_0^2 \tau^2 \beta_\perp^2 \Omega}{m_0} \frac{\omega_n}{\omega} \frac{x}{(1+x^2)^2}. \tag{10}$$

Оценим мощность излучения электронного пучка. Плотность тока в пучке определим обычным образом:

$$I = eN_e v_\parallel.$$

Здесь N_e — число электронов на единицу длины вдоль направления магнитного поля (ток считаем заданным и постоянным), а $v_\parallel = v\cos\theta$, где v — полная скорость электрона, θ — угол между направлением магнитного поля и направлением полной скорости электрона. Кинетическую энергию электрона запишем в виде

$$W_k = eU,$$

где U — некоторая эквивалентная ускоряющая разность потенциалов, учитывающая потери энергии на излучение при движении электрона до заданной точки. При этих условиях величина $\beta_\perp$ в выражении (9) может быть связана с величиной W_k соотношением

$$\beta_\perp^2 = \frac{2W_k}{m_0c^2}\sin^2\theta.$$

Учитывая введенные обозначения, для мощности излучения в данной точке с единицы длины электронного пучка запишем

$$P = \frac{2e^2\tau^2E_0^2\Omega p_0\sin^2\theta}{m_0^2c^2v\cos\theta}\,\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\frac{\omega_n}{\omega}, \tag{11}$$

где $p_0 = IU$.

Так как по мере продвижения электронов вдоль пространства взаимодействия мощность p_0 вследствие излучения будет убывать, то и мощность P также будет уменьшаться. Полная мощность излучения всего пучка электронов может быть найдена путем интегрирования выражения (11) по всей длине электронного пучка в области взаимодействия.

Максимальное значение мощности излучения с единицы длины электронного пучка соответствует значению $x = -1/\sqrt{3}$. Если ограничиться очень малыми величинами излучаемой мощности так, чтобы p_0 и x вдоль пучка можно было считать постоянным, то формула (11) может дать полную мощность излучения пучка:

$$P_L = \alpha PL, \tag{12}$$

где α — коэффициент, мало отличающийся от единицы (он может быть определен экспериментально). Формула (12) может быть использована для численного расчета и экспериментальной проверки, например, в режиме бегущей волны. В этом случае величины P_0, E_0, v, x, θ определяются экспериментально и формула (11) становится доступной экспериментальной проверке. Коэффициент усиления в режиме бегущей волны может быть выражен следующим образом:

$$\eta = P_L/P_{\text{вх}},$$

где $P_{\text{вх}}$ — входная мощность сигнала, P_L — мощность сигнала на выходе из мазера.

Численный пример

Формула (11) дает возможность оценить мощность излучения с единицы длины, если заданы E_0, τ, Ω (эквивалентно заданному $\vec{H}$), P_0, θ, v. Для величины x можно взять его экстремальное значение $x = -1/\sqrt{3}$. Проведем расчет для случая, когда $H = 10^4$ *эрс*, $W_k = eU = 10^4$ *эв*, $p_0 = 1000$ *вт*, $\theta = 45°$, $L = 20$ *см*.

Будем считать, что мазер работает в режиме мощного усилителя бегущей волны и на его вход подается сигнал с мощностью на 1 *см*^{2}, равной 3 *вт/см*^{2} (т. е. этой величине равен поток вектора Умова—Пойнтинга). Расчет для входящих в формулу (11) величин дает следующие значения: $v = 5{,}85\cdot10^9$ *см/сек*, $\sin\theta = \cos\theta = 0{,}7$; $\tau = 20/v\cos\theta = 4{,}9\times\times10^{-9}$ *сек*, $\Omega = 1{,}75\cdot10^{11}$ *рад/сек*, $p_0 = 10^{10}$ *эрг/сек*; $E_0 = 0{,}1$ CGSE. Подстановка в формулу (11) дает для мощности с 1 *см* длины электронного пучка в мазере (отсчитанной вдоль направления $\vec{H}$) следующее значение $p = 10$ *вт/см*.

Следовательно, в результате прохождения волной 1 *см* длины мазера она усилится больше чем в четыре раза и мощность излучения, несмотря на ослабление проходящего электронного пучка, будет нарастать. Мощность излучения со следующего сантиметра пучка будет примерно в четыре раза больше, т. е. составит уже около 40 *вт* и т. д.

Разумеется, при таком большом коэффициенте усиления полная мощность излучения мазера может быть вычислена лишь путем интегрирования (11) по всей длине пучка, что представляет сложную задачу и требует специального расчета.

Если взять для входного сигнала значение на порядок меньше, т. е. 0,3 *вт*/*см*^{2}, то соответственно с первого сантиметра пучка мощность излучения составит 1 *вт*, со следующего 4 *вт*, затем 15 *вт* и т. д. Такие большие коэффициенты усиления обусловлены большим значением мощности электронного пучка, сравнительно высоким значением магнитного поля и, следовательно, частоты Ω. Расчет излучения всего мазера по формуле (11) может быть произведен последовательными ступенями с учетом ослабления величины p_0, увеличения E_0 и изменения значения x при переходе от точки к точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., «Высшая школа», 1968, стр. 30.
2. Собельман И. И., Тютин И. В. «Успехи физических наук», **29**, вып. 4, 595—616, 1963.
3. Schneider J. Phys. Rev. Lett., **2**, 505, 1959.
4. Соколов А. А., Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. В сб.: «Синхротронное излучение». М., «Наука», 1966, стр. 72—152.
5. Гапонов А. В. «Изв. вузов», радиофизика, 2, № 3, 1959.
6. Гапонов А. В. ЖЭТФ, **39**, № 2, (8), 326, 1960.
7. Раппопорт Г. А., Неман А. К., Жураховский В. А. «Радиотехника и электроника», **12**, вып. 4, 643, 1967.
8. Курин А. Ф. «Изв. вузов», радиофизика, **10**, № 8, 1160, 1967.
9. Курин А. Ф. «Радиотехника и электроника», **14**, вып. 10, 1908, 1969.
10. Курин А. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 1, 47, 1970.
11. Курин А. Ф. Автореферат диссертации. МГУ, 1970.
12. Канавец В. И., Стабинис А. Ю. «Изв. вузов», радиофизика, **12**, 129, 1969.
13. Канавец В. И., Стабинис А. Ю. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 5, 1970.
14. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика. М., «Просвещение», 1965, стр. 288.

Поступила в редакцию
6.8 1971 г.

Кафедра
радиотехники