

Г. А. БЕНДРИКОВ, АРАУХО У. ФОНСЕКА

ИССЛЕДОВАНИЕ АКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ (К общей теории траекторий корней)

В работе предложен метод построения полного корневого годографа, состоящего из корневого годографа и годографа параметра траекторий корней для получения возможно более исчерпывающей информации о динамике систем с обратной связью. Указаны основные формулы для построения годографа параметра, получаемые аналитическим методом траекторий корней, и основные свойства годографов параметра. Работа проиллюстрирована построением типичных полных корневых годографов.

В основных работах, посвященных теории корневых годографов, исследованию и проектированию активных линейных и линеаризованных систем с помощью метода траекторий корней, построение корневых годографов сопровождается калибровкой (тарировкой) их по свободному параметру, выбранному в качестве параметра траекторий корней [1—6]. Для этого используется геометрическая формула параметра траекторий корней вида

$$\rho = \frac{\prod_1^n |p - p_\nu|}{\prod_1^m |p - z_\mu|} (-1)^{N+1}, \quad (1)$$

где $|p - p_\nu|$ и $|p - z_\mu|$ — модули векторов, проведенных из начальных и предельных точек соответственно до заданной точки, лежащей на траекториях корней, $N = 0, \pm 1 \pm 2 \dots$

В работах, посвященных аналитическому методу траекторий корней, приводятся другие формулы параметра траекторий корней, однако они также применяются для тарировки корневых годографов или нахождения критических значений параметра [3—7].

В ряде работ производится тарировка семейства корневых годографов построением на плоскости p ортогонального им семейства кривых, соответствующих постоянным значениям параметра ρ [8, 9]. В работе [9] такие семейства ортогональных кривых называются обобщенными корневыми годографами.

Построение на плоскости $p = \delta + j\omega$ линий постоянного значения параметра (например коэффициент усиления) также применяется при изучении многочастотных систем [10].

Более подробно даются формулы параметра при исследовании различных типов траекторий корней класса [4; 0] в работе [11], а также при исследовании систем с машинным усилителем [12]. А. Горювич [6] указывает на возможность упрощения построения корневых годографов геометрическим методом при использовании графиков $1/\rho(\delta)$, ветви которых в полюсах передаточной функции уходят в бесконечность и в нулях пересекают ось δ .

С помощью формул параметра аналитического метода траекторий корней можно получать богатую информацию о динамических свойствах систем в области устойчивости при изменении любого свободного параметра, линейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения.

Ниже получим формулы параметра и введем понятие годографа параметра траекторий корней в плоскости (δ, ρ) и (ω, ρ) и полного корневого годографа. Рассмотрим общие свойства годографа параметра и проиллюстрируем построение полного корневого годографа для ряда типичных случаев.

Характеристическое уравнение с линейно входящим в $(m+1)$ коэффициент свободным параметром, может быть записано в виде

$$\Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) = 0, \quad (2)$$

где ρ — свободный параметр (параметр траекторий корней), Φ_n и Ψ_m — полиномы от $p = \delta + j\omega$ целых положительных степеней n и m ($n \geq m$). Полагая [3] в уравнении (2):

$$\Phi_n = \Phi_r + j\omega\Phi_j \quad \text{и} \quad \Psi_m = \Psi_r + j\omega\Psi_j, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \Phi_n^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n^{(2)}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{(4)}(\delta) - \dots, \\ \Phi_j &= \Phi_n^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n^{(3)}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{(5)}(\delta) - \dots, \\ \Psi_r &= \Psi_m^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Psi_m^{(2)}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Psi_m^{(4)}(\delta) - \dots, \\ \Psi_j &= \Psi_m^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Psi_m^{(3)}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Psi_m^{(5)}(\delta) - \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

получаем уравнение траекторий корней вида

$$\omega = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r = 0. \quad (5)$$

Здесь в верхних скобках указан порядок производных по δ .

Собирая члены при одинаковых степенях ω в уравнении (5), имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\Phi^{(0)}\Psi^{(1)}}{0! 1!} - \frac{\Phi^{(1)}\Psi^{(0)}}{1! 0!} \right) - \omega^2 \left(\frac{\Phi^{(0)}\Psi^{(3)}}{0! 3!} - \frac{\Phi^{(1)}\Psi^{(2)}}{1! 2!} + \frac{\Phi^{(2)}\Psi^{(1)}}{2! 1!} - \frac{\Phi^{(3)}\Psi^{(0)}}{3! 0!} \right) + \\ &+ \omega^4 \left(\frac{\Phi^{(0)}\Psi^{(5)}}{0! 5!} - \frac{\Phi^{(1)}\Psi^{(4)}}{1! 4!} + \frac{\Phi^{(2)}\Psi^{(3)}}{2! 3!} - \frac{\Phi^{(3)}\Psi^{(2)}}{3! 2!} + \frac{\Phi^{(4)}\Psi^{(1)}}{4! 1!} - \frac{\Phi^{(5)}\Psi^{(0)}}{5! 0!} \right) - \\ &- \omega^6 \left(\frac{\Phi^{(0)}\Psi^{(7)}}{0! 7!} - \dots - \frac{\Phi^{(7)}\Psi^{(0)}}{7! 0!} \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы параметра траекторий корней для $\omega \neq 0$ имеют вид

$$-\rho = \frac{\Phi_r}{\Psi_r} = \frac{\Phi_n^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n^{(2)}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{(4)}(\delta) - \dots}{\Psi_m^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Psi_m^{(2)}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Psi_m^{(4)}(\delta) - \dots} \quad (7)$$

или

$$-\rho = \frac{\Phi_j}{\Psi_s} = \frac{\Phi_n^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n^{(3)}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{(5)}(\delta) - \dots}{\Psi_m^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Psi_m^{(3)}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Psi_m^{(5)}(\delta) - \dots} \quad (8)$$

Для действительной оси $\omega = 0$ и согласно (7) и (4)

$$-\rho = \frac{\Phi_n(\delta)}{\Psi_m(\delta)} = \frac{a_0 \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n}{b_0 \delta^m + b_1 \delta^{m-1} + \dots + b_{m-1} \delta + b_m} \quad (9)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n и b_0, b_1, \dots, b_m — коэффициенты полиномов Φ_n и Ψ_m соответственно.

Уравнение траекторий корней (6) для систем классов [2; 1], [2; 2], [3; 0], [3; 1], [4; 0] первого порядка относительно ω^2 и второго порядка $(\omega^2)^2$ для систем классов [3; 2], [3; 3], [4; 1], [4; 2], [5; 0], [5; 1] и [6; 0], поэтому, определив из уравнения траекторий корней ω^2 и подставив в уравнение (7) или (8), можно получить формулы параметра в функции δ :

$$\rho = \rho_{\omega \neq 0}[\delta, \omega^2(\delta)] = \rho_{\omega \neq 0}(\delta), \quad (10)$$

справедливые в области наличия комплексных корней уравнения (2) или комплексных ветвей корневого годографа.

Аналогично возможно построение зависимости ρ от δ по уравнению (10) для систем любого порядка.

Кроме указанных выше формул параметра траекторий корней возможно получение формулы параметра непосредственно из уравнения (2). Подставляя в (2) из уравнения (3) $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ и выделяя действительную часть, запишем

$$-\rho = \operatorname{Re} \left| \frac{\Phi_n}{\Psi_m} \right| = \frac{\Phi_r \Psi_r + \omega^2 \Phi_j \Psi_j}{\Psi_r^2 + \omega^2 \Psi_j^2} \quad (11)$$

Эта формула справедлива при любых значениях ω . Однако она является более сложной, и пользование ею удобно в случае получения неопределенных значений ρ для некоторых точек траекторий корней по формулам данным выше.

Построение траекторий корней на плоскости комплексных частот p по уравнению (6) определяет как положительный ($\rho > 0$), так и отрицательный ($\rho < 0$) корневой годограф. Это соответствует отрицательной и положительной обратным связям.

Годографом параметра траекторий корней будем называть совокупность всех кривых:

$$\rho = \rho_{\omega=0}(\delta), \quad \rho = \rho_{\omega \neq 0}(\delta) \quad \text{и} \quad \rho = \rho_{\delta=\text{const}}(\omega), \quad (12)$$

построенных на плоскости параметра траекторий корней (δ, ρ) или на плоскости (ω, ρ) по формулам (7) и (8) для $\omega \neq 0$ и (9) для $\omega = 0$.

Последний случай $\rho(\omega)$ имеет место, когда существуют ветви корневого годографа параллельные мнимой оси.

Положительному корневому годографу на плоскостях (δ, ρ) и (ω, ρ) соответствуют годографы параметра траекторий корней (годограф параметра), построенные в верхней полуплоскости, и отрицательному корневому годографу соответствует годограф параметра, построенный в нижней полуплоскости параметра траекторий корней.

Совокупность корневого годографа и годографа параметра траекторий корней будем называть полным корневым годографом (положительным или отрицательным) характеристического уравнения (2) или системы, описываемой этим уравнением.

Перейдем к рассмотрению свойств годографа параметра траекторий корней и примерам построения полного корневого годографа.

Рассмотрим ветви годографа параметра. Определяемые формулой (9) для корней, находящихся на действительной оси. По определению в начальных точках $\rho=0$ и в предельных для нечетных траекторий корней $\rho \rightarrow +\infty$ и для четных траекторий $\rho \rightarrow -\infty$.

Из формулы (9) следует, что для $n > m$ и при $\delta \rightarrow \pm\infty$ значение параметра ρ стремится к $\pm\infty$.

В случае $n=m$ при $\delta \rightarrow \pm\infty$, согласно (9), значение ρ стремится к конечному пределу:

$$-\rho = \frac{a_0}{b_0}. \quad (13)$$

На рисунках положение начальных точек отмечено крестиком, предельных — кружком, стрелка указывает направление перемещения корня по нечетной траектории ($\rho > 0$) и двойные стрелки по четной траектории ($\rho < 0$).

Для любых систем класса $[n; m=n]$ и $[n; n-1]$ в случае чередования начальных и предельных точек на действительной оси годограф параметра полностью решает задачу о расположении всех действительных корней для заданных ρ . На рис. 1 построены годограф параметра и корневой годограф системы класса $[3; 3]$, характеристическое уравнение которой

$$(\rho + 2)(\rho + 4)(\rho + 6) + \rho(\rho + 1)(\rho + 3)(\rho + 5) = 0$$

или

$$(\rho^3 + 12\rho^2 + 44\rho + 48) + \rho(\rho^3 + 9\rho^2 + 23\rho + 15) = 0.$$

При $\rho > 0$ система всегда устойчива, при $\rho < 0$ система устойчива в интервале $-1 < \rho < 0$, в интервале $-3,33 < \rho < -1$ система аperiodически неустойчива, при $\rho < -3,33$ система снова устойчива. Положение всех корней при $\rho = \text{const}$ задано однозначно (кроме $\rho = -1$).

Рассмотрим построение полного корневого годографа заданной физической системы, соответствующего (рис. 2) уравнению класса $[3; 0]$:

$$\rho(\rho + 1)(\rho + 2) + \rho = \rho^3 + 3\rho^2 + 2\rho + \rho = 0.$$

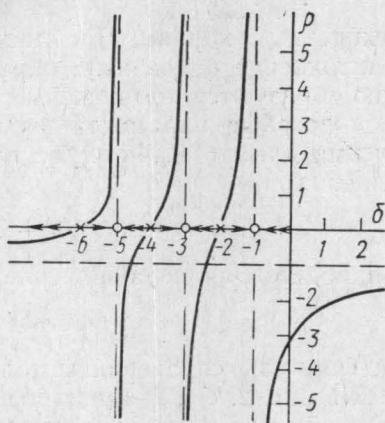


Рис. 1

Уравнение траекторий корней $\omega^2 = 3\delta + 6\delta + 2$ представляет собой гиперболу (рис. 2, б) с центром, совпадающим с центром асимптот $a^* = -1$.

Для траекторий корней, лежащих на действительной оси, годограф параметра имеет вид согласно (9) $-\rho = \delta(\delta+1)(\delta+2)$ (рис. 2, а) стрелками показаны направления перемещения действительных корней для положительного и отрицательного годографов с увеличением $|\rho|$. Кривая $\rho = \rho(\delta)$ имеет экстремумы в точках a и b , соответствующих двукратным корням. В области $\rho_1 \geq \rho \geq \rho_2$ все корни действительные, их положение однозначно определено. Далее с возрастанием ρ по модулю образуются комплексные корни. Для построения комплексных ветвей годографа параметра необходимо пользоваться формулами (7) и другими для $\omega \neq 0$. Формула параметра (для $\omega \neq 0$) согласно (7), принимает вид

$$-\rho = \delta^3 + 3\delta^2 + 2\delta - 3\omega^2(\delta + 1).$$

Или, подставляя сюда значение ω^2 , получаем

$$\rho = 8\delta^3 + 24\delta^2 + 22\delta + 6.$$

Эти формулы справедливы только в областях $\rho > a$ и $-\rho < b$.

На рис. 2, б и 2, в построены полные положительный и отрицательный корневые годографы системы. Система имеет область устойчивости при $\rho > 0$. Значению ρ_2 соответствуют три действительных корня, значениям ρ_1 и ρ_3 два комплексно-сопряженных и один действительный корень.

Рассмотрим случай, когда с возрастанием $|\rho|$ от нуля имеет место образование комплексных ветвей траекторий и их выход с плоскости p на действительную ось. Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$(\rho + 1)(\rho + 2) + \rho\rho = (\rho^2 + 3\rho + 2) + \rho\rho = 0.$$

Построим полный корневой годограф. Уравнение траекторий корней имеет вид (рис. 3, а)

$$\omega^2 + \delta^2 = (\sqrt{2})^2 \text{ и } \omega = 0.$$

Формулы параметра для комплексных ветвей траекторий, согласно (7) и (8):

$$-\rho = \frac{\delta^2 + 3\delta + 2 - \omega^2}{\delta} = 2\delta + 3$$

и для $\omega = 0$, согласно (9):

$$-\rho = \frac{\delta^2 + 3\delta + 2}{\delta}.$$

На рис. 3, б построен годограф параметра. Комплексные корни имеют место при $\rho < 0$. Формула параметра для $\omega \neq 0$ справедлива в области $-\sqrt{2} < \delta < \sqrt{2}$. Для положительного годографа параметра имеются две области отрицательных действительных корней $0 > \delta > -1$ и $\delta < -2$. Для отрицательного годографа параметра в области устойчивости ($0 > \rho > -3$) имеется область действительных и область комплексных корней. Точке b ($\delta = +\sqrt{2}$) соответствует двойной корень. Далее с уменьшением ρ образуется пара действительных положительных корней.

При перенесении мнимой оси плоскости p общий вид корневого годографа не изменяется. Новому положению мнимой оси при том же

взаимном расположении основных точек, соответствует иной годограф параметра корней (другая физическая система).

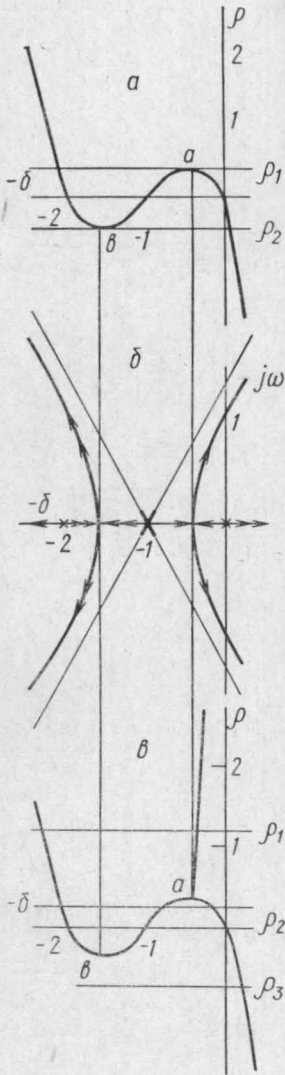


Рис. 2

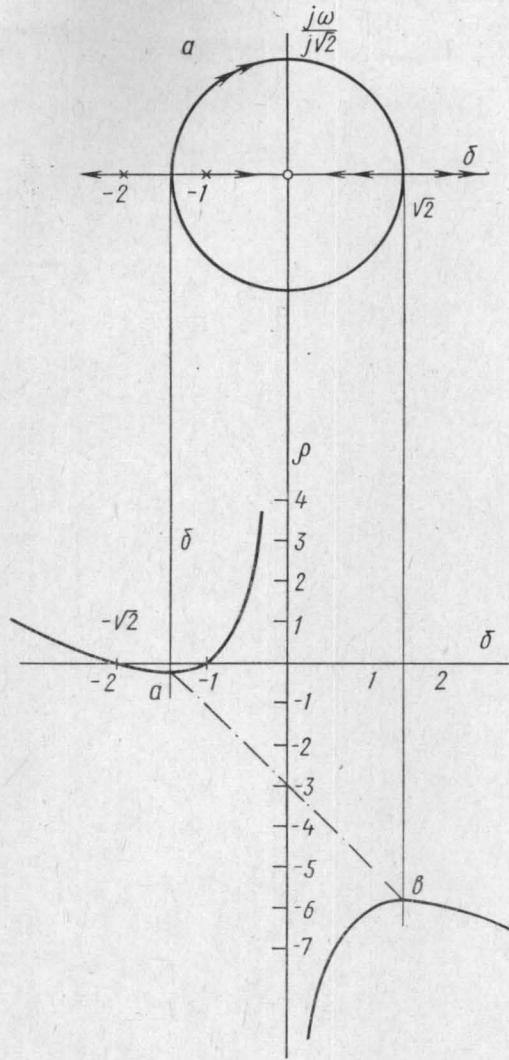


Рис. 3

Рассмотрим полный корневой годограф системы класса $[2; 0]$. Уравнения траекторий и формулы параметра имеют вид

$$\omega = 0 \text{ и } -\rho = a_0\delta^2 + a_1\delta + a_2,$$

$$\delta = -\frac{a_1}{2a_0} \text{ и } -\rho = \left(a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}\right) - \omega^2 a_0.$$

На рис. 4 даны траектории корней системы $[2; 0]$, для которой $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=2$. Траекториями являются ось абсцисс δ и линия параллельная оси $j\omega$ ($\delta=-1,5$). Для действительной оси параметр ρ является

функцией δ , а для комплексной ветви ρ — функция ω . В этом проявляется особенность траекторий, параллельных оси $j\omega$.

Рассмотрим траектории корней системы, в которой возможен переход корней, уходящих в бесконечность по траекториям, параллельным мнимой оси $j\omega$, на действительную ось.

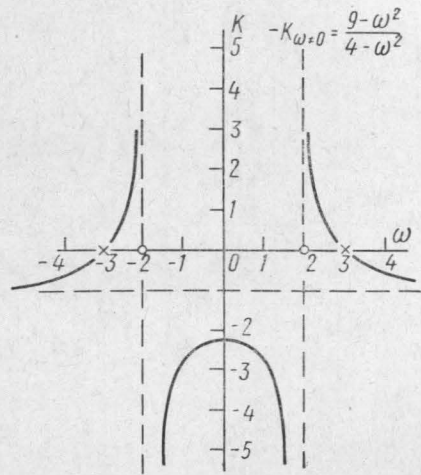
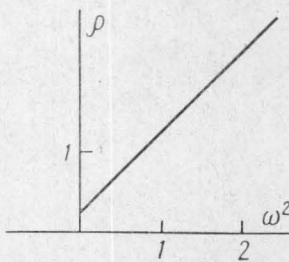
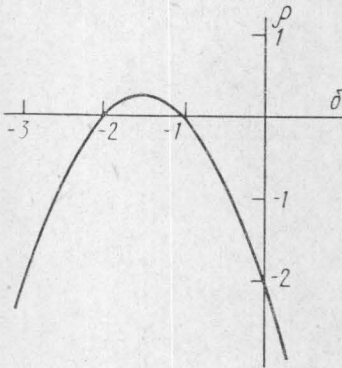
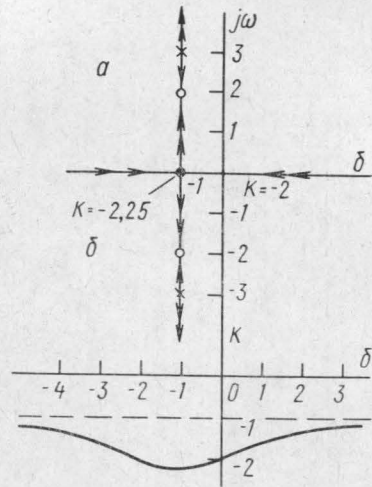
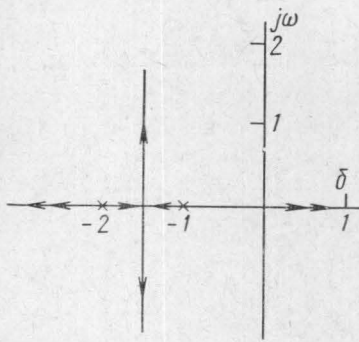


Рис. 4

Рис. 5

Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$[(p+1)^2 + 9] + \rho[(p+1)^2 + 4] = (p^2 + 2p + 10) + \rho(p^2 + 2p + 5) = 0.$$

Уравнение траекторий $\omega=0$ и $\delta=-1$. Формулы параметра соответственно

$$-\rho = \frac{\delta^2 + 2\delta + 10}{\delta^2 + 2\delta + 5},$$

$$-\rho = \frac{\delta^2 + 2\delta + 10 - \omega^2}{\delta^2 + 2\delta + 5 - \omega^2} = \frac{9 - \omega^2}{4 - \omega^2}.$$

При $\delta \rightarrow \pm\infty$ и $\omega \rightarrow \pm\infty$ обе эти формулы дают $\rho = -1$, происходит перескок корней, удаляющихся в бесконечность при $\rho \rightarrow -1$ по траекториям, параллельным оси $j\omega$ из левой полуплоскости в правую.

На рис. 5 приведены корневой годограф (а) и годограф параметра, являющегося функцией δ или ω (соответственно рис. 5, б, в); здесь $\rho = K$.

При указанном расположении начальных и предельных точек невозможна реализация системы с колебательной устойчивостью в пределах $-1 \leq \delta \leq 0$. Это результат идеализации системы, так как в реальной системе параметры ее произвольно изменяются, и тогда нет перехода траекторий корней через бесконечность.

Аналогично могут быть построены полные корневые годографы для систем разных классов $[n; m]$ или для других свободных параметров, рассмотренных выше систем.

Полный корневой годограф для системы классов $[n; m]$ и $[n; n-1]$ со всеми действительными чередующимися основными точками строится на одном рисунке, совмещая корневой годограф и годограф параметра (см. рис. 1). Для построения полного корневого годографа характеристических уравнений, имеющих комплексные ветви, строится отдельно корневой годограф и годограф параметра. При наличии в корневом годографе ветвей, параллельных мнимой оси, дополнительно строится часть годографа параметра в функции ω (рис. 5, в).

Выше проиллюстрированы типичные примеры построения полных корневых годографов. Теперь перейдем к общим замечаниям.

С помощью полного корневого годографа решается задача нахождения всех комплексных частот системы для заданного (например в области устойчивости) параметра траекторий корней ($\rho = \text{const}$), а также определяются возможные колебательные режимы системы (близкие или далекие комплексные корни, все действительные корни, изменение степени устойчивости системы, изменение колебательности системы, выделение доминирующих корней для заданного ρ , исследование переходных процессов с изменением ρ , и т. п.) в различных областях значений свободного параметра (рис. 2).

В случае задания $\Phi_n(\rho)$ и $\Psi_m(\rho)$ в виде полиномов, по формуле (9) можно графически определить начальные ($\rho = 0$) и предельные точки ($\rho \rightarrow \pm\infty$). Этим построением определяются также области действительных корней положительных и отрицательных корневых годографов и по годографу параметра их положение.

По асимптотическим свойствам корневого годографа определяется возможное расположение комплексных корней.

Широкое применение вычислительных машин дает возможность точного построения полного корневого годографа по стандартным программам. Указанные свойства полного корневого годографа позволяют более рационально использовать машинное время при нахождении корней характеристических уравнений n -го порядка.

Следует заметить, что объем вычислений при построении полного корневого годографа значительно меньше, чем это необходимо для построения семейства некоторых частотных характеристик для различных значений свободного параметра.

Полный корневой годограф (6), (12) дает информацию о возможных динамических свойствах систем, движение которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans W. R. Control System Dynamics Mc. Graw—Hill, N. Y., 1954.
2. Траксел Дж. Синтез систем автоматического регулирования. М., Машгиз, 1959.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
4. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М., Госэнергоиздат, 1963.
5. Cannon R. H. Jr. Dynamics of Physical Systems Mc. Graw—Hill N. Y., London, 1967.
6. Горовиц А. М. Синтез системы с обратной связью. М., «Советское радио», 1970.
7. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. Книга 1. М. «Машиностроение», 1967.
8. Yeh V. C. M. Trans. AIEE, 75, p. 2, 1956.
9. Римский Г. В. «Изв. АН БССР», сер. физико-технических наук, № 3, 1966.
10. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. В трудах III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике) Многосвязные и инвариантные системы. Нелинейные и дискретные системы. М., «Наука», 1968.
11. Бендриков Г. А. Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 октября 1956 г., т. II. Основные проблемы автоматического регулирования и управления. М., Изд-во АН СССР, 1957.
12. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 1961.

Поступила в редакцию
6.9 1971 г.

Кафедра
физики колебаний