

Ю. И. СИРОТИН, О. С. РОВЕНСКАЯ

СИММЕТРИЧНЫЙ И НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ
УПРУГОИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ
ПЛАСТИНОК

Теория идеальной упругопластичности кристаллов, подчиняющихся закону критических скальвающих напряжений, применена к расчету упругопластического изгиба кристаллических пластинок под действием изгибающего момента. Исследовано влияние анизотропии пластических свойств кристалла на распределение напряжений; оно может приводить, в частности, к появлению поперечных и сдвиговых напряжений, а также к несимметричному изгибу.

Расчет напряжений и деформаций, возникающих в плоскопараллельных упругоидеальнопластических кристаллических пластинках под действием равномерно распределенного изгибающего момента, проведен для кристаллов типа NaCl, обладающих двусторонними системами скольжения $\{1\bar{1}0\} \langle 110 \rangle$, и для кристаллов Mo, в которых действуют два типа семейств скольжения: односторонние $\{11\bar{2}\} \langle 111 \rangle$ и $\{\bar{1}\bar{1}2\} \langle 111 \rangle$ и двустороннее $\{1\bar{1}0\} \langle 111 \rangle$. Согласно теоретическому рассмотрению [1], подтвержденному экспериментами [2], они должны рассматриваться совместно. Для решения поставленной задачи используются уравнения теории идеальной упругопластичности кристаллов, подчиняющихся закону критических скальвающих напряжений [3].

§ 1. Исходные уравнения. Упругий этап

Введем две системы декартовых координат: $X_1 X_2 X_3$ с осями $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, направленными по $\langle 100 \rangle$, и XYZ с осями \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} — по \vec{j} направлены изгибающие моменты, \vec{k} нормален плоскости пластинки. Начало координат изберем в средней плоскости пластинки, толщина пластинки $2a$ (рис. 1). Тензорные компоненты с индексами 1, 2, 3 отнесены к системе $X_1 X_2 X_3$, с индексами x, y, z или помеченные штрихом к системе XYZ .

Запишем функции текучести системы скольжения $(\vec{n}^\alpha, \vec{l}^\alpha)$

$$f^{(\alpha)} = n_i^{(\alpha)} l_j^{(\alpha)} \sigma_{ij} \dots Y^{(\alpha)}, \quad (1)$$

где $n_i^{(\alpha)} l_j^{(\alpha)}$ — компоненты нормали и направления скольжения соответственно,

σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, Y^α — критическое скалывающее напряжение. С функциями текучести ассоциирован закон пластического течения

$$\dot{\epsilon}_{ij} = s_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda^{(\alpha)} (n_i^{(\alpha)} l_j^{(\alpha)} + l_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)}),$$

$$\lambda^{(\alpha)} \geq 0, \text{ если } f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \dot{f}^{(\alpha)} = 0,$$

$$\lambda^{(\alpha)} = 0, \text{ если } f^{(\alpha)} < 0 \text{ и если } f^{(\alpha)} = 0, \text{ но } \dot{f}^{(\alpha)} < 0. \quad (2)$$

Здесь s_{ijkl} — коэффициенты упругой податливости кристалла, $\lambda^{(\alpha)}$ — некоторые неизвестные пока функции координат и времени. Далее рассматриваются процессы нагружения — изгибающий момент, приходящийся на единицу ширины пластинки, M монотонно возрастает. При этом удобно дифференцирование по времени заменить дифференцированием по моменту и считать λ^α функциями координат и момента.

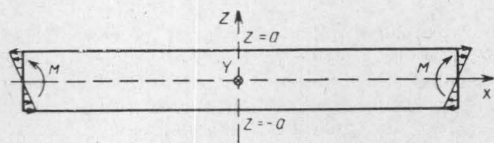


Рис. 1. Схема изгиба пластинки

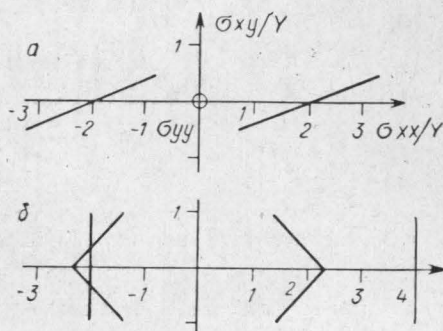


Рис. 2. Проекция поверхностей текучести на плоскость, а — для кристалла типа NaCl: $(\sigma_{xx} - 2\sigma_{xy}^{3/2}) = 4Y$, б — для Mo: $-\sigma_{xx} = 2Y$, $\sigma_{xx} = 4Y$ и $(\sigma_{xx} + 2 \cdot 6^{-1/2} \sigma_{xy}) = 4 \cdot 3^{1/2} Y$, $(\sigma_{xx} - 2 \cdot 6^{-1/2} \sigma_{xy}) = 4 \cdot 3^{-1/2} Y$

Напряжения σ_{ij} и деформации ϵ_{ij} зависят только от M и z .

Из уравнений упругого равновесия и отсутствия усилий на поверхностях $z = \pm a$ следует

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0. \quad (3)$$

Полагая, что перед нагружением пластинка свободна от внутренних напряжений, имеем для упругого этапа нагружения

$$\sigma_{xx}(z, M) = (3M/2a^3)z, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0. \quad (4)$$

Как на упругом, так и на пластических этапах нагружения справедливы равенства

$$\int_{-a}^a \sigma_{xx} dz = \int_{-a}^a \sigma_{yy} dz = \int_{-a}^a \sigma_{xy} dz = 0,$$

$$\int_{-a}^a z \sigma_{xx} dz = M, \quad \int_{-a}^a z \sigma_{yy} dz = \int_{-a}^a z \sigma_{xy} dz = 0. \quad (5)$$

Пластическое течение при действии односторонней системы скольжения начинается у одного из краев пластинки, а при действии двусто-

ронней — одновременно у обоих краев, когда скалывающее напряжение $n_x^{(\alpha)} l_x^{(\alpha)} \sigma_{xx}$ достигает критического значения $Y^{(\alpha)}$. При этом момент $M = M_0 = 2a^2 Y^{(\alpha)} / (3n_x^{(\alpha)} l_x^{(\alpha)})$. Таким образом, на упругом этапе напряженное состояние не зависит ни от ориентировки, ни от направления изгибающего момента. С началом же пластического течения резко проявляется «индивидуальность» пластинок и рассмотрение пластического этапа приходится проводить для разных пластинок отдельно.

§ 2. Пластика из кристалла типа NaCl

В качестве примера рассмотрим пластический изгиб при достаточно диссимметричной ориентации кристаллической пластинки $(1\bar{1}0)$ и изгибающего момента $[111]$. Оты системы XYZ :

$$\vec{i} = 6^{-1/2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3), \quad \vec{j} = 3^{-1/2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{k} = 2^{-1/2} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Функция текучести двусторонней системы скольжения $(101) [10\bar{1}]$ в системе XYZ (рис. 2,а):

$$f = |\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy}| - 4Y. \quad (6)$$

С ней ассоциирован закон пластического течения:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = s'_{11} \dot{\sigma}_{xx} + s'_{12} \dot{\sigma}_{yy} + s'_{16} \dot{\sigma}_{xy} + \lambda \text{sign} (\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy}), \quad (7a)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = s'_{12} \dot{\sigma}_{xx} + s'_{22} \dot{\sigma}_{yy}$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = s'_{16} \dot{\sigma}_{xx} + s'_{66} \dot{\sigma}_{xy} - 2^{3/2} \lambda \text{sign} (\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy}). \quad (7b)$$

При двусторонних системах скольжения вся картина изгиба пластинки антисимметрична относительно средней плоскости, так что ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} оказываются нечетными функциями z . Тогда уравнения совместности дадут

$$\epsilon_{xx}(z, M) = z\psi_{xx}(M), \quad \epsilon_{yy}(z, M) = z\psi_{yy}(M), \quad \epsilon_{xy}(z, M) = z\psi_{xy}(M), \quad (8)$$

где $\psi(M)$ — функция момента, характеризующие изгиб (ψ_{xx} , ψ_{yy}) и скручивание (ψ_{xy}) пластинки. Величина $\psi_{xx} = d\psi_{xx}/dM$ определяет податливость пластинки изгибу. Далее предполагается, что в уравнениях (6) деформации заменены выражениями (8). Заменяем систему (7) эквивалентной ей системой уравнений:

$$(s'_{16} + 2^{3/2} s'_{11}) \dot{\sigma}_{xx} + 2^{3/2} s'_{12} \dot{\sigma}_{yy} + (s'_{66} + 2^{3/2} s'_{16}) \dot{\sigma}_{xy} = z (\dot{\psi}_{xy} + 2^{3/2} \dot{\psi}_{xx}). \quad (9a)$$

$$s'_{12} \dot{\sigma}_{xx} + s'_{22} \dot{\sigma}_{yy} = z \dot{\psi}_{yy}, \quad (9b)$$

$$\dot{\sigma}_{xx} - 2^{3/2} \dot{\sigma}_{xy} = z \Phi(M) + c\lambda, \quad (9b)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(M) = & \{s'_{22} [s'_{66} + 2^{3/2} s'_{16}] z \dot{\psi}_{xx} - s'_{12} [s'_{66} + 2^{3/2} s'_{16}] z \dot{\psi}_{yy} - \\ & - [s'_{16} s'_{22} + 2^{3/2} s'_{11} s'_{22} - 2^{3/2} (s'_{12})^2] z \dot{\psi}_{xy}\} / [s'_{11} s'_{22} s'_{66} - \\ & - (s'_{12})^2 s'_{66} - (s'_{16})^2 s'_{22}], \end{aligned}$$

$$c = [8 (s'_{12})^2 - 8s'_{11} s'_{22} - s'_{22} s'_{66} - 2^{3/2} s'_{16} s'_{22}] / [s'_{11} s'_{22} s'_{66} - (s'_{12})^2 s'_{66} - (s'_{16})^2 s'_{22}].$$

Функция $\lambda(z, M)$ отлична от нуля лишь в пластических зонах $|z| \geq \zeta(M)$, но в них $f = 0$ и

$$\dot{f} = \dot{\sigma}_{xx} - 2^{3/2} \dot{\sigma}_{xy} = 0, \quad (10)$$

поэтому ее можно исключить из уравнения (9в):

$$\dot{\sigma}_{xx} - 2^{3/2} \dot{\sigma}_{xy} = \begin{cases} z \Phi(M) & \text{при } |z| \leq \zeta, \\ 0 & \text{при } |z| \geq \zeta. \end{cases} \quad (9в')$$

Умножим уравнения (9а, б, в') на z и проинтегрируем их по толщине пластинки. Учитывая, что из (5) следует

$$\int_{-a}^a z \dot{\sigma}_{xx} dz = \dot{M} = 1, \quad \int_{-a}^a z \dot{\sigma}_{yy} dz = \int_{-a}^a z \dot{\sigma}_{xy} dz = 0, \quad (11)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{xy} + 2^{3/2} \dot{\psi}_{xx} &= s'_{16} + 2^{3/2} s'_{11}, \\ \dot{\psi}_{yy} &= s'_{12}, \\ \Phi(M) &= \frac{3}{2\zeta^3}. \end{aligned} \quad (12)$$

После подстановки этих выражений в уравнения (9а, б, в') первые два из них могут быть проинтегрированы непосредственно:

$$\sigma_{xx} + (s'_{22}/s'_{12}) \sigma_{yy} = 4Y (M/M_0) z/a, \quad (13а)$$

$$\sigma_{xx} + \frac{s'_{12}}{s'_{11} + 2^{-3/2} s'_{16}} \sigma_{yy} + \frac{s'_{66} + 2^{3/2} s'_{16}}{2^{3/2} s'_{11} + s'_{16}} \sigma_{xy} = 4Y (M/M_0) z/a, \quad (13б)$$

а интегрирование третьего дает

$$\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy} = \frac{3M_0}{2a^3} z + \frac{3}{2} z \int_{M_0}^M \frac{dM}{|\zeta^3}. \quad (14)$$

Так как на границе верхней ($z > \zeta$) пластической зоны

$$\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy} = 4Y,$$

то, положив в (14) $z = \zeta$, получим

$$3 \int_{M_0}^M \frac{dM}{\zeta^3} = 8Y \frac{1 - \zeta}{\zeta}. \quad (15)$$

Продифференцировав по M обе части этого интегрального уравнения, преобразуем его в дифференциальное уравнение $8Y \zeta \dot{\zeta} = -3$ с начальным условием $\zeta(M_0) = a$. Решение последнего:

$$\zeta = a \sqrt{3 - 2(M/M_0)}. \quad (16)$$

Теперь можно записать окончательный результат интегрирования уравнения (9'):

$$\sigma_{xx} - 2^{3/2} \sigma_{xy} = 4Y \mathcal{P}(z/\zeta), \quad (13в)$$

где функция

$$\mathcal{P}(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1, \\ \text{sign } x & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Система линейных уравнений, (13, а, б, в) определяет распределение напряжений в кристаллической пластинке при пластическом изгибе. В частности, если кристалл упругого изотропен и несжимаем, она приводит к распределению напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (4/3) Y [2(M/M_0) z/a + \mathcal{P}(z/\zeta)], \\ \sigma_{yy} &= (2/3) Y [-(M/M_0) z/a + \mathcal{P}(z/\zeta)], \\ \sigma_{xy} &= (2^{3/2}/3) Y [(M/M_0) z/a - \mathcal{P}(z/\zeta)], \end{aligned} \quad (17)$$

показанному на рис. 3.

§ 3. Пластинка из кристалла молибдена

Существует ограниченное количество объемно-центрированных кубических кристаллов, в которых оценивались соотношения между критическими скальвующими напряжениями [2, 5—6]. Воспользуемся данными Гюи для M_0 :

$$Y_{\{01\bar{1}\} \langle 111 \rangle} \approx Y_{\{\bar{1}\bar{1}2\} \langle \bar{1}\bar{1}\bar{1} \rangle} \approx \frac{1}{2} Y_{\{11\bar{2}\} \langle 111 \rangle} \approx Y. \quad (18)$$

Это позволяет выбрать ориентацию пластинки

$$\vec{k} = [(\sqrt{2} - 1)(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + (\sqrt{2} + 2)\vec{e}_3]/2\sqrt{3}$$

и изгибающего момента $\vec{j} = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2}$ так, чтобы в нижней части пластинки действовала начиная со значения момента

$$M = M_0 = (4/3) a^2 Y_{\{\bar{1}\bar{1}2\} \langle 111 \rangle}$$

система $(\bar{1}\bar{1}2)$ $[111]$, а в верхней, начиная с

$$M = M'_0 = (8/3^{3/2}) a^2 Y_{\{01\bar{1}\} \langle 111 \rangle} \text{ — системы } (0\bar{1}\bar{1}) [111] \text{ и } (10\bar{1}) [111].$$

При этом из 36 возможных в таких кристаллах функций текучести существуют всего 3:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= -\sigma_{xx} - 2Y_{\{\bar{1}\bar{1}2\} \langle 111 \rangle}, \\ f^{(2)} &= \sigma_{xx} - \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_{xy} - \frac{4}{\sqrt{3}} Y_{\{01\bar{1}\} \langle 111 \rangle}, \\ f^{(3)} &= \sigma_{xx} + \frac{2}{\sqrt{6}} \sigma_{xy} - \frac{4}{\sqrt{3}} Y_{\{01\bar{1}\} \langle 111 \rangle}. \end{aligned} \quad (19)$$

Они изображены на рис. 2, б для случая, когда равенство (18) точно. Согласно (19)

$$(4/3^{1/2}) Y_{\{01\bar{1}\} \langle 111 \rangle} / 2Y_{\{\bar{1}\bar{1}2\} \langle 111 \rangle} = \gamma > 1.$$

Пластическое течение начинается с нижнего края пластинки $z = -a$. Напряжения на первом этапе пластического изгиба ищем в виде

$$\sigma_{xx}(z, M) = \begin{cases} (z - \varphi) A & \text{при } z \geq -\xi, \\ -2Y & \text{при } z \leq -\xi. \end{cases} \quad (20)$$

Условие $\sigma_{xx}(-\xi, M) = (-\xi - \varphi)A = -2Y$ позволяет исключить A . Подставляя (20) в равенство (5), получим систему уравнений для опре-

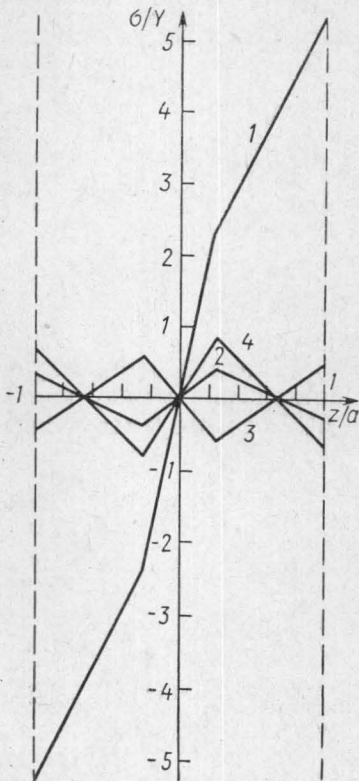


Рис. 3. Распределение напряжений по толщине пластинки из упруго изотропного несжимаемого кристалла. Граница пластической зоны $|\xi| = 0,25 a$. 1 — σ_{xx}/Y , 2 — $\sigma_{yy}/Y = \sigma_{yy}^{\text{ост}}/Y$, 3 — $\sigma_{xy}/Y = \sigma_{xy}^{\text{ост}}/Y$, 4 — $\sigma_{xx}^{\text{ост}}/Y$

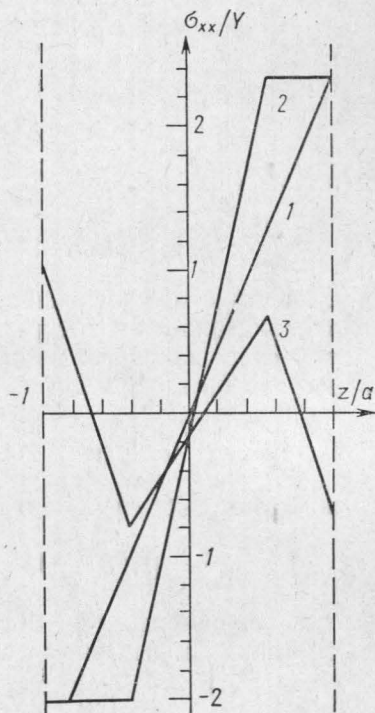


Рис. 4. Распределение напряжений по толщине пластинки при несимметричном изгибе: 1 — σ_{xx}/Y для $M = M_0$, $\xi = 0,84 a$, $\varphi = 0,01 a$; 2 — σ_{xx}/Y для $M = 1,5 M_0$, $\xi = 0,39 a$, $\eta = 0,55 a$, $\varphi = 0,04 a$; 3 — $\sigma_{xx}^{\text{ост}}/Y$ (при уменьшении момента от $M^{\text{max}} = 1,5 M_0$ до нуля нейтральное сечение пластинки продолжает удаляться от средней плоскости и доходит до $\varphi = 0,12 a$)

деления границы пластической зоны ξ и нейтрального сечения φ . Из них найдем:

$$\xi = a(2 - M/M_0), \quad \varphi = a(M/M_0 - 1)^{1/4}. \quad (21)$$

Итак, запишем распределение напряжений:

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{8Y}{(3 - M/M_0)^2} \left[\frac{z}{a} - \frac{(1 - M/M_0)^2}{4} \right] & \text{при } z \geq -\xi, \\ -2Y & \text{при } z \leq -\xi, \end{cases}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0. \quad (22)$$

Второй этап пластического изгиба начинается, когда напряжение σ_{xx} на верхней поверхности пластинки $z=a$ достигает величины $2\gamma Y$. При этом момент $M = M_0' = (3\gamma - 1)M_0/(1 + \gamma)$. Напряжения ищем в виде

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} 2\gamma Y & \text{при } z \geq \eta, \\ (z - \varphi)A & \text{при } \eta \geq z \geq -\xi, \\ -2Y & \text{при } z \leq -\xi. \end{cases} \quad (23)$$

Границы пластических зон, нейтральное сечение и параметр A определяются уже известным способом:

$$\begin{aligned} \xi &= a \left[(1 - \gamma)/(1 + \gamma) + \sqrt{12\gamma/(1 + \gamma)^2 - 4(M/M_0)/(1 + \gamma)} \right], \\ \eta &= a \left[(\gamma - 1)/(1 + \gamma) + \sqrt{12\gamma/(1 + \gamma)^2 - 4(M/M_0)/(1 + \gamma)} \right], \\ \varphi &= a(\gamma - 1)/(1 + \gamma) \left[1 - \sqrt{12\gamma/(1 + \gamma)^2 - 4(M/M_0)/(1 + \gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Распределение напряжений на этом этапе пластического изгиба

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} 2\gamma Y & \text{при } z \geq \eta, \\ \frac{(1 + \gamma)Y(z - \varphi)}{a \sqrt{12\gamma/(1 + \gamma)^2 - 4(M/M_0)/(1 + \gamma)}} & \text{при } \eta \geq z \geq -\xi, \\ -2Y & \text{при } z \leq -\xi; \end{cases} \quad (25)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0;$$

представлено на рис. 4.

§ 4. Разгрузка. Остаточные напряжения

При уменьшении изгибающего момента от максимального достигнутого значения $M^* > M_0$ до некоторого значения $M \geq 0$ поперечное (σ_{yy}) и сдвиговое (σ_{xy}) напряжения сохраняют значения, достигнутые ими при M^* , а продольное напряжение уменьшается по закону

$$\sigma_{xx}(z, M) = \sigma_{xx}(z, M^*) - [3(M^* - M)/2a^3]z. \quad (26)$$

Отсюда ясно, что остаточные напряжения, т. е. те, которые остаются после полного снятия момента, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\text{ост}}(z) &= \sigma_{xx}(z, M^*) - (3M^*/2a^3)z, \\ \sigma_{yy}^{\text{ост}}(z) &= \sigma_{yy}(z, M^*), \quad \sigma_{xy}^{\text{ост}}(z) = \sigma_{xy}(z, M^*). \end{aligned} \quad (27)$$

Эпюры остаточных напряжений приведены на рис. 3 и 4.

§ 5. Обсуждение результатов

Пластический изгиб кристаллических пластинок — простейший пример, позволяющий оценить влияние анизотропии пластических

свойств кристаллов на характер пластической деформации. Совпадение характера пластического изгиба кристалла и изотропного тела в случае рассмотренном Ридом [7], (ориентация пластинки (001), момента [010]) — следствие особо высокой симметрии решенной им задачи.

В § 3 рассмотрен значительно более общий случай, когда наряду с продольным напряжением σ_{xx} на пластическом этапе нагружения появляются поперечное (σ_{yy}) и сдвиговое (σ_{xy}) напряжения, отсутствующие в решении Рида. Особенно существен их вклад в формирование остаточных напряжений. В отличие от случая изотропного тела распределение напряжений зависит от упругих постоянных. Предположение об изотропности упругих свойств не изменяет особенностей распределения напряжений (см. рис. 3); это показывает, что они обусловлены анизотропией именно пластических свойств. Некоторые частные случаи ориентации пластинки и момента рассмотрены в [8].

Другое проявление анизотропии пластических свойств — асимметричное скольжение, наблюдается в ряде кристаллов [9]. Оно проявляется в несимметричном изгибе, возможном только при действии достаточно диссимметричных систем скольжения [10]. Существование асимметрии скольжения кристаллов подтверждает целесообразность описания их пластических свойств посредством кусочно-линейной и в общем случае нецентросимметричной поверхности текучести [1] и несовместимости ни с какой центросимметричной поверхностью, в частности, с поверхностью текучести второго порядка Мизеса. При ориентации пластинки, выбранной в § 4, несимметричный изгиб — единственное проявление пластической анизотропии. При других ориентациях несимметричность может сочетаться с другими особенностями пластического изгиба кристаллов, которые рассмотрены в § 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов С. С., Сиротин Ю. И. «Кристаллография», 13, 1, 1968.
2. Guin F. Scripta Met., 3, 449—454, 1969.
3. Сиротин Ю. И. «Изв. АН СССР», 1, 39, 1970.
4. Foxall R. A., Deusbery M. S., Hirsch P. B. Can. J. of Phys., 45, 2, 1967.
5. Leray F., Duranseau J. M. Acad. Sc., Paris, C270, 512—515, 1970.
6. Borwen D. K., Christian J. W., Taylor G. Can. J. of Phys., 45, 2, 1967.
7. Read W. T. Acta Met., 5, 83—88, 1957.
8. Rovenskaja O. S., Sirotnin Yu. I., Voroshilov I. L. Kristall und Technik, 7, 7, 1972.
9. Mitchell T. E. Phil. Mag., 17, 1169—94, 1968.
10. Ионкин В. П., Ровенская О. С., Сиротин Ю. И. «Кристаллография», 16, 3, 1971.

Поступила в редакцию
7.10 1971 г.

Кафедра
физики кристаллов