Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1973

УДК 539.12.01

В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, Н. С. НИКИТИНА

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА И ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ В ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

На основе квазиклассических решений уравнения Дирака получено единое выражение для вероятности излучения в постоянных электрическом и магнитном полях. Исследованы поляризационные свойства излучения. Показано, что в электрическом поле спин электрона под действием излучения ориентируется преимущественно перпендикулярно полю.

Вероятность процессов, происходящих с частицами высокой энергии во внешних полях с напряженностью, много меньшей критической $B_0 = \frac{m^2}{e_0} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ *э*, может быть записана с помощью единой инвариантной функции независимо от явного вида поля. Это было показано как для процессов первого порядка [1, 2], так и для процессов второго порядка [3, 4] на основе расчета соответствующих процессов в скрещенных полях равной напряженности. При этом поляризационные и спиновые характеристики не были рассмотрены. Объяснение указанной выше общности результатов следует искать в квазиклассичности движения релятивистских частиц во внешних полях. Представляет интерес поэтому выяснить квазиклассические условия для двух основных типов полей — электрического и магнитного, а также проанализировать поляризационные и спиновые характеристики процессов в указанных полях.

В настоящей работе будут найдены квазиклассические решения уравнения Дирака для электрона, движущегося в однородных и постоянных полях электрического и магнитного типа. С помощью этих решений будут получены формулы для вероятности излучения фотонов в обоих случаях и проведено их сравнение с учетом поляризационных и спиновых эффектов.

Квазиклассические решения

В случае постоянного и однородного магнитного поля систему координат и калибровку потенциала $A^\mu = \{A^0, \vec{A}\}$ выберем так, чтобы

$$\vec{H} \parallel Oz, \ \vec{A} = (0, xH, 0), \ A^0 = 0. \quad (1)$$

Стационарное решение уравнения Дирака для электрона

$$(\vec{\alpha}\vec{P} + \rho_3 m - i\,\partial/\partial t)\,\Psi = 0, \tag{2}$$

где $\vec{P} = -i\vec{\nabla} + e_0\vec{A}$, $e = -e_0 < 0$ — заряд электрона, $\vec{\alpha}$, ρ_3— матрицы Дирака[1], будем искать в виде

$$\Psi(\vec{r}, t) = N_H \begin{pmatrix} C_1 f_1 \\ i\,C_2 f_2 \\ C_3 f_1 \\ i\,C_4 f_2 \end{pmatrix} e^{ip_2 y + ip_3 z - iEt}, \tag{3}$$

где Ci — постоянные спиновые коэффициенты. Функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{2p_\perp}{\sqrt{e_0 H}}\,\eta \mp 1 - \eta^2\right\} f_{1,2} = 0, \tag{4}$$

где верхний или нижний знаки соответствуют индексам 1 или 2. В этом уравнении вместо x мы ввели безразмерную переменную:

$$\eta = \sqrt{e_0 H}\,\xi,\quad \xi = x - x_0 + R, \tag{5}$$

и обозначения

$$x_0 = -p_2/e_0 H,\quad R = p_\perp/e_0 H,\quad p_\perp = \sqrt{E^2 - m^2 - p_3^2}, \tag{6}$$

которые, как обычно, имеют смысл координаты центра орбиты x_0, радиуса орбиты R и поперечного импульса $p_\perp$.

Если параметр, входящий в уравнение (4), велик (условие квазиклассики):

$$p_\perp/\sqrt{e_0 H} \gg 1, \tag{7}$$

то в этом случае уравнение имеет асимптотическое решение [5], которое можно записать через функцию Эйри Φ:

$$f_{1,2} = \Phi(-\lambda\xi_{1,2}), \tag{8}$$

где

$$\Phi(-\lambda\xi_{1,2}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi\, e^{-i\lambda\xi_{1,2}\psi + i\frac{\psi^3}{3}},\quad \xi_{1,2} = \xi \mp \frac{1}{2p_\perp},$$

$$\lambda = (2e_0 H p_\perp)^{1/3}. \tag{9}$$

Физический смысл полученного таким путем приближенного решения становится ясным, если в уравнении (4) перейти к переменной ξ. Функция (8) удовлетворяет этому уравнению с отброшенным членом ξ^2 и таким образом является приближенным решением в области малых $\xi^2 \ll R^2$, описывающим движение электрона на малом участке квазиклассической траектории.

Такое решение оказывается весьма удобным для исследования излучения, поскольку, как будет видно из дальнейшего, формирование

---

[1] Ниже принята система единиц $c = \hbar = 1$, метрика $(+---)$,

$$a^\mu = \{a^0, \vec{a}\},\quad a_\mu = \{a^0, -\vec{a}\},\quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

излучения релятивистского квазиклассического электрона происходит на весьма малом участке траектории.

Коэффициенты Ci могут быть найдены, если потребовать, чтобы функция Ψ была также собственной функцией оператора спиновой поляризации, являющегося интегралом движения. В качестве такого оператора мы выберем четырехмерный скалярный оператор

$$M = F_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} = \vec{\Pi}\vec{H} + \vec{\Phi}\vec{\mathscr{E}}, \tag{10}$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор внешнего поля, а $\Pi^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензорный оператор спина [6, 7]:

$$\Pi^{\mu\nu} = \{\vec{\Pi}, \vec{\Phi}\}, \ \vec{\Pi} = m\vec{\sigma} + \rho_2[\vec{\sigma}\vec{P}], \ \vec{\Phi} = -\rho_3[\vec{\sigma}\vec{P}]. \tag{11}$$

В случае магнитного поля уравнение на собственные значения для оператора спиновой поляризации (10) имеет вид

$$\Pi_3\Psi = \zeta E_\perp \Psi, \tag{12}$$

где

$$\Pi_3 = m\sigma_3 + \rho_2[\vec{\sigma}\vec{P}]_3, \ E_\perp = \sqrt{E^2 - p_3^2}, \ \zeta = \pm 1.$$

Подчиняя волновую функцию (3) уравнению (12), находим спиновые коэффициенты, соответствующие ориентации спина вдоль ($\zeta=1$) и против ($\zeta=-1$) направления магнитного поля:

$$C_{1,3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\zeta\frac{m}{E_\perp}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{p_3}{E}\right)^{1/2} \pm \zeta\left(1-\frac{p_3}{E}\right)^{1/2}\right],$$

$$C_{2,4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta\left(1-\zeta\frac{m}{E_\perp}\right)^{1/2}\left[\zeta\left(1-\frac{p_3}{E}\right)^{1/2} \mp \left(1+\frac{p_3}{E}\right)^{1/2}\right],$$

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 = 1, \tag{13}$$

где верхние знаки соответствуют индексам 1 или 2, а нижние — 3 или 4.

Значение нормировочного коэффициента

$$N_H = \left(\frac{2\lambda}{L_0 L^2}\right)^{1/2} \tag{14}$$

следует из условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-L/2}^{L/2} dy \int\limits_{-L/2}^{L/2} dz\, \Psi^+ \Psi = 1, \tag{15}$$

причем мы ввели конечный «объем» L_0 фазы ψ в интегральном представлении функций Эйри (9):

$$L_0 = \int\limits_{-L_0/2}^{L_0/2} d\psi. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь однородное и постоянное электрическое поле $\vec{\mathscr{E}}$. Калибровку потенциала и систему координат в этом случае выберем так, чтобы

$$\vec{\mathscr{E}} \parallel 0z, \ \vec{A} = (0, 0, -\mathscr{E}t), \ A^0 = 0. \tag{17}$$

Решение уравнения Дирака (2) в этом поле можно искать в виде

$$\Psi(\vec{r},\ t) = N_E\, e^{i\vec{p}\vec{r}} \begin{pmatrix} g_1 + Ag_2 \\ B(g_1 + Ag_2) \\ Ag_2 - g_1 \\ B(g_1 - Ag_2) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где A и B — постоянные спиновые коэффициенты.

Функции g_1 и g_2 зависят от времени и подчиняются уравнениям:

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{E_\perp^2}{e_0\mathscr{E}} + \tau^2 \pm i\right) g_{1,2} = 0, \tag{19}$$

где

$$\tau = \sqrt{e_0\mathscr{E}}\ (t - t_0), \tag{20}$$

$$t_0 = \frac{p_3}{e_0\mathscr{E}},\ E_\perp = \sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{m^2 + p_\perp^2}.$$

Квазиклассическое условие в случае электрического поля имеет вид

$$E_\perp^2/e_0\mathscr{E} \gg 1. \tag{21}$$

Это условие для уравнения (19) приводит к асимптотическому решению:

$$g_{1,2} = \exp\left\{-i(t - t_0)\left(E_\perp \pm i\frac{e_0\mathscr{E}}{2E_\perp}\right) - \frac{i}{6}\frac{(t - t_0)^3}{E_\perp}(e_0\mathscr{E})^2\right\}. \tag{22}$$

Физически такое решение описывает движение электрона в интервале времени

$$(t - t_0)^2 \ll (E_\perp/e_0\mathscr{E})^2. \tag{23}$$

Как будет видно из дальнейшего, излучение фотонов релятивистским электроном происходит на весьма малых временных интервалах, в силу чего решение (22) оказывается весьма удобным для расчетов подобных эффектов.

Для определения спиновых коэффициентов выберем тот же инвариантный спиновый оператор (10) и подчиним волновую функцию (18) уравнению

$$\Phi_3\Psi = \zeta p_\perp \Psi,\ \zeta = \pm 1, \tag{24}$$

где

$$\Phi_3 = -\rho_3[\vec{\sigma}\vec{P}]_3 = -\rho_3\frac{\vec{\sigma}\,[\vec{P}\vec{\mathscr{E}}]}{\mathscr{E}}. \tag{25}$$

Как видно из (25), уравнение (24) определяет состояния с ориентацией спина, ортогональной направлению электрического поля и поперечному импульсу $p_\perp$.

Учитывая уравнение (24), а также условие нормировки

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz\, \Psi^+\Psi = 1, \tag{26}$$

найдем окончательно

$$A = \frac{m + i\zeta p_\perp}{E_\perp},\quad B = i\zeta\frac{p_1 + ip_2}{p_\perp},\quad N_E = \frac{1}{2\sqrt{2}\ L^{3/2}}. \tag{27}$$

Излучение в постоянных электромагнитных полях

Вероятность излучения фотона электроном за время t может быть найдена по формуле

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \sum_{a'} \int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} (e_\mu \overset{*}{\alpha}{}^{\mu}_{a'a}) (\overset{*}{e}_\nu \alpha^{\nu}_{a'a}), \tag{28}$$

где

$$\alpha^{\mu}_{a'a} = \int dt \int d^3x\, \Psi^{+}_{a'}\, \alpha^{\mu}\, e^{i\varkappa t - i\vec{\varkappa}\vec{r}}\, \Psi_{a}, \tag{29}$$

$\alpha^\mu = \{I, \vec{\alpha}\}$, Ψ_a и $\Psi_{a'}$ — волновые функции начального и конечного состояний электрона во внешнем поле, а e^μ — единичный 4-вектор поляризации фотона.

В случае постоянных и однородных полей два 4-вектора линейной поляризации могут быть заданы единым образом:

$$e^\mu(1) = \frac{F^{\mu\nu}\varkappa_\nu}{\sqrt{-(F_{\mu\nu}\varkappa^\nu)^2}}, \quad e^\mu(2) = \frac{F^{*\mu\nu}\varkappa_\nu}{\sqrt{-(F_{\mu\nu}\varkappa^\nu)^2}}, \tag{30}$$

где

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma},$$

а $\varkappa^\nu$ — 4-вектор импульса фотона, причем $\varkappa^\nu\varkappa_\nu = 0$.

Независимо от конкретного вида поля, определяемого тензором $F_{\mu\nu}$, векторы (30) являются единичными, четырехмерно поперечными и ортогональными друг к другу:

$$e^2(1) = e^2(2) = -1, \; e(1)\,e(2) = 0, \; e(1)\varkappa = e(2)\varkappa = 0, \tag{31}$$

Трехмерная поперечность в случае полей определенного вида может быть достигнута градиентным преобразованием.

Рассмотрим излучение в магнитном поле, когда состояния электрона определены функциями (3). После соответствующего градиентного преобразования трехмерные компоненты (30) будут определять σ- и π-компоненты [8] линейной поляризации, т. е. в сферических координатах:

$$\vec{e}(1) = \vec{e}(\sigma); \quad \vec{e}(\sigma) = (\sin\varphi, \; -\cos\varphi, \; 0);$$

$$\vec{e}(2) = \vec{e}(\pi); \quad \vec{e}(\pi) = (\cos\theta\cos\varphi, \; \cos\theta\sin\varphi, \; -\sin\theta);$$

$$\vec{\varkappa}^0 = \frac{\vec{\varkappa}}{\omega} = (\sin\theta\cos\varphi, \; \sin\theta\sin\varphi, \; \cos\theta). \tag{32}$$

Интегрирование по t, y и z в матричных элементах дает законы сохранения:

$$E = E' + \omega, \quad p_2 = p_2' + \varkappa_2, \quad p_3 = p_3' + \varkappa_3, \tag{33}$$

а интегрирование по x приводит к интегралам типа ($i, k = 1, 2$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\varkappa_1 x} f_i' f_k = \frac{\sqrt{\pi}\; e^{i\Omega_{ik}}}{(\lambda^3 - \lambda'^3)^{1/3}}\, \Phi(z_{ik}). \tag{34}$$

Фазы Ω_{ik} и аргументы функций Эйри z_{ik} в ультрарелятивистском случае ($p_\perp \gg m$) легко могут быть найдены, если учесть, что при $p_3=0$ основной вклад в интегралы по углам θ и φ дает область

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1, \ \varphi = -\frac{\pi}{2} + \varphi_1, \ \theta_1^2 \sim \varphi_1^2 \ll 1. \tag{35}$$

При этом z_{ik} оказываются не зависящими от φ_1:

$$z_{ik} = \left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3} \left[1 + \delta^2 \pm f\left(\frac{2+u}{u} - \frac{2}{u}\delta_{ik}\right)\right], \tag{36}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, а верхний знак соответствует $i=1$ (нижний знак — $i=2$).

Параметры χ, f и переменные u, δ:

$$\chi = \frac{H}{B_0}\frac{p_\perp}{m}, \ f = \frac{H}{B_0}, \ u = \frac{\omega}{p_\perp - \omega}, \ \delta = \frac{p_\perp \theta_1}{m}, \tag{37}$$

могут быть записаны в инвариантном виде через тензор поля $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{gathered} \chi = \frac{e_0}{m^3}\sqrt{-(F_{\mu\nu}P^\nu)^2}, \ f = \sqrt{\frac{e_0^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{2m^4}}, \\ u = \frac{\chi - \chi'}{\chi'}, \ \delta = -e_0 \frac{F^*_{\mu\nu} P'^{\mu} P^\nu}{m^4(\chi - \chi')}. \end{gathered} \tag{38}$$

В рассматриваемом случае магнитного поля $P_1^2 + P_2^2 = p_\perp^2$.

В дальнейшем будем считать $H \ll B_0$, т. е. проведем разложение по параметру $f \ll 1$.

Основной вклад в формировании функции Эйри в (34) дает область переменной ψ вблизи точек стационарной фазы:

$$\psi_{1,2} = -\frac{\lambda^2 \varkappa_1}{\lambda^3 - \lambda'^3} \pm i \frac{\lambda'}{(\lambda^3 - \lambda'^3)^{1/3}}\sqrt{z_{ik}}. \tag{39}$$

Откуда, в силу независимости z_{ik} от φ_1, находим

$$d\varphi_1 = \frac{2e_0 H}{\lambda^2} d\psi, \tag{40}$$

т. е. интеграл по углам φ в вероятности (28) пропорционален объему L_0 фазы ψ. Суммируя далее по конечным состояниям с помощью законов сохранения (33), получим следующее спектральноугловое распределение вероятности излучения в единицу времени, записанное через инвариантные переменные u и δ:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dw_1 \\ dw_2 \end{bmatrix} &= \frac{e^2}{2\pi}\frac{m^2}{p_\perp(1+u)^3}\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{1/3} du\, d\delta \times \\ &\times \left\{ \frac{1+\zeta\zeta'}{2} \begin{bmatrix} \left((2+u)\left(\frac{2\chi}{u}\right)^{1/3}\Phi' + \zeta u \Phi\right)^2 \\ \delta^2(2+u)^2\Phi^2 \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. + \frac{1-\zeta\zeta'}{2} \begin{bmatrix} u^2\delta^2\Phi^2 \\ u^2\left(\left(\frac{2\chi}{u}\right)^{1/3}\Phi' - \zeta\Phi\right)^2 \end{bmatrix} \right\} \quad \Phi = \Phi(z), \end{aligned} \tag{41}$$

$$z=\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}(1+\delta^2).$$

Индексы 1 и 2 здесь соответствуют компонентам поляризации, заданным векторами $\vec{e}$ (1) и $\vec{e}$ (2). Кроме того, вероятность разбита на два слагаемых, описывающих излучение без переворота ($\zeta=\zeta'$) и с переворотом ($\zeta=-\zeta'$) спина. Выражение (41) совпадает с результатом [8], который был получен путем нахождения асимптотик матричных элементов излучения, вычисленных по точным волновым функциям.

Для вычисления излучения в электрическом поле используем квазиклассические функции (18). Интегралы по x, y, z в матричных элементах (29) дают законы сохранения

$$p_1'=-\varkappa_1,\quad p_2'=p_2-\varkappa_2,\quad p_3'=p_3-\varkappa_3 \tag{42}$$

(для определенности положим $p_1=0$, $p_2>0$).

Интегралы по t выражаются через функцию Эйри:

$$\int\limits_0^t dt\, e^{i\varkappa t} g_i'^{*} g_k=\frac{2\sqrt{\pi}\; e^{i\Omega_{ik}}}{\left[\frac{(e_0\mathscr{E})^2}{2}\left(\frac{1}{E_\perp'}-\frac{1}{E_\perp}\right)\right]^{1/3}}\Phi(z_{ik}), \tag{43}$$

аргументы которой в ультрарелятивистском случае $E_\perp\gg m$ в области углов

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_1,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi_2,\quad \theta_1^2\sim\varphi_2^2\ll 1 \tag{44}$$

не зависят от угла θ_1 и определяются формулой, аналогичной (36):

$$z_{ik}=\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}\left[1+\delta^2\mp f\left(1+\frac{2}{u}\delta_{ik}\right)\right]. \tag{45}$$

Параметр χ и переменные u, δ, входящие в аргументы z_{ik}, записываются в виде

$$\chi=\frac{\mathscr{E}}{B_0}\frac{E_\perp}{m},\quad u=\frac{\omega}{E_\perp-\omega},\quad \delta=\frac{E_\perp}{m}\varphi_1, \tag{46}$$

при этом малый параметр $f=i\,\mathscr{E}/B_0$, а также χ, u, δ сохраняют свои инвариантные выражения (38) через тензор поля $F_{\mu\nu}$, причем в данном случае $P_0^2-P_3^2=E_\perp^2$.

Так же как и при выводе формулы (40), учитывая область формирования интеграла (43), находим связь:

$$d\theta_1=\frac{e_0\,\mathscr{E}}{p_\perp}dt. \tag{47}$$

Определяя так же, как и в магнитном поле, поляризацию излучения векторами (30), после соответствующего градиентного преобразования находим, что трехмерные поперечные векторы в случае электрического поля связаны с σ- и π-компонентами обратным по отношению к (32) способом, т. е.

$$\vec{e}(1)=-\vec{e}(\pi),\quad \vec{e}(2)=\vec{e}(\sigma). \tag{48}$$

В итоге для спектральноуглового распределения вероятности излучения в электрическом поле получим формулу, совпадающую с (41) с учетом значений переменных (46). Усредняя и суммируя по поляризациям и спиновым состояниям начального и конечного состояний, из формулы (41) получаем результат работы [9].

Таким образом, вероятность излучения (41), записанная через инвариантные параметры и переменные (38), не зависит от f и имеет единую форму для электрического и магнитного полей. При этом спиновые и поляризационные состояния, заданные ковариантными величинами с помощью оператора (10) и 4-векторов (30), определенных через тензор поля $F_{\mu\nu}$, входят инвариантным образом в выражение для вероятности.

Из общего выражения (41) для вероятности излучения и формул (32), (48) следует, что поляризация излучения в электрическом и в магнитном поле имеет противоположный характер. С другой стороны, если в магнитном поле под действием излучения спин электрона ориентируется преимущественно против направления поля [8], то в электрическом поле согласно (25) — в направлении, перпендикулярном полю.

Авторы благодарны А. А. Соколову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 46, 776, 1964.
2. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 46, 1768, 1964.
3. Жуковский В. Ч., Херрманн И. «Ядерная физика», 14, 150, 1971.
4. Жуковский В. Ч., Херрманн И. «Ядерная физика», 14, 1014, 1971.
5. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962.
6. Соколов А. А., Колесникова М. М. ЖЭТФ, 38, 1778, 1960.
7. Тернов И. М., Багров В. Г., Бордовицын В. А. «Изв. вузов», физика, № 4, 41, 1967.
8. Сб. «Синхротронное излучение». Под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова, «Наука», 1966.
9. Никишов А. И. ЖЭТФ, 59, 1262, 1970.

Поступила в редакцию
16.11 1971 г.

Кафедра
теоретической физики