Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1973

УДК 539.17

И. В. АМИРХАНОВ, В. Е. ГРЕЧКО, Р. К. ДЕМЕНТЬЕВ

МЕТОД МНОГОКАНАЛЬНОЙ СВЯЗИ И УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА

В рамках метода многоканальной связи сделан переход от системы многомерных уравнений Фаддеева к системе одномерных интегро-дифференциальных уравнений. Предложен метод решения полученных уравнений, удобный для описания системы при энергиях выше порога развала.

Задача непрерывного спектра в системе нескольких частиц при энергиях, когда возможен развал на три и более фрагмента, довольно часто встречается в различных разделах физики. Выше порога развала при каждом фиксированном значении полной энергии возможно непрерывное распределение энергии между частицами, что значительно усложняет ситуацию. Поэтому представляет большой интерес нахождение и исследование наиболее эффективных методов решения подобных задач. Последние достижения в исследовании ядерных реакций и в физике малонуклонных систем связаны, во-первых, с созданием ряда приближенных методов решения уравнения Шредингера [1—4], во-вторых, с разработкой и совершенствованием методов решения системы интегральных уравнений [5—8].

Формальная теория рассеяния и реакций в системе из трех частиц была развита Фаддеевым [6]. Как правило, интегральные уравнения Фаддеева рассматриваются в импульсном представлении. После выделения угловых переменных и подстановки двухчастичной T-матрицы в сепарабельном виде указанная система сводится к системе одномерных интегральных уравнений [7—8], допускающей численное интегрирование. Подобный подход значительно усложняется при рассмотрении задачи выше порога развала [7—9].

В данной работе проведено исследование уравнений Фаддеева в координатном представлении. В этом случае появляется практическая возможность описывать поведение системы при энергиях выше порога развала, использовать локальные потенциалы, в том числе и потенциалы с кором.

Уравнения Фаддеева в координатном представлении

Уравнения Фаддеева в операторной форме имеют следующий вид [6, 7]:

$$\Psi^i = \delta_{ip_0}\Phi^i + G_i V_i (\Psi^j + \Psi^k), \ i \neq j \neq k = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Здесь $\Psi = \sum_{i=1}^{3} \Psi^i$ — полная волновая функция трехчастичной системы, Φ^i — собственная волновая функция асимптотического гамильтониана, $H_i = H_0 + V_i$, V_i — потенциал взаимодействия между частицами j и k, $G_i = 1/(E - H_i + i\eta)$ — функция Грина, H_0 — свободный гамильтониан, p_0 — индекс входного канала.

Система уравнений (1) описывает рассеяние свободной частицы ($p_0 = 1, 2, 3$) на двух частицах, находящихся в связанном состоянии. Аналогичный вид имеет система уравнений, описывающая рассеяние трех свободных частиц [6, 7].

Перепишем систему уравнений (1), используя явный вид функций Грина:

$$\Psi^i(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i) = \delta_{ip_0}\Phi^i(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i) + \sum_{L_i M_i l_i m_i} \frac{4M_i\mu_i}{\hbar^4} \frac{Y_{L_i M_i}(\vec{R}_i) Y_{l_i m_i}(\vec{\rho}_i)}{R_i \rho_i} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n_i=1}^{N_i} \frac{\varphi_{n_i l_i}(\rho_i)}{K_{n_i}} \int d\vec{R}_i' \frac{Y^*_{L_i M_i}(\vec{R}_i')}{R_i'} G^{(\pm)}_{n_i L_i}(R_i, R_i') \int d\vec{\rho}_i' \frac{Y^*_{l_i m_i}(\vec{\rho}_i')}{\rho_i'} \varphi_{n_i l_i}(\rho_i') - \right.$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int d\varepsilon \int d\vec{R}_i' d\vec{\rho}_i' \frac{Y^*_{L_i M_i}(\vec{R}_i') Y^*_{l_i m_i}(\vec{\rho}_i')}{R_i' \rho_i'} G^{(\pm)}_{K_i L_i}(R_i; R_i') \times$$

$$\left. \times G^{(\pm)}_{k_i l_i}(\rho_i; \rho_i') \right\} V_i(\rho_i') [\Psi^j(\vec{R}_j, \vec{\rho}_j) + \Psi^k(\vec{R}_k, \vec{\rho}_k)]. \qquad (2)$$

Здесь $G^{(\pm)}_{n_i L_i}$ ($G^{(\pm)}_{K_i L_i}$) и $G^{(\pm)}_{k_i l_i}$ — одночастотные функции Грина [10]:

$$G^{(\pm)}_{n_i L_i}(R_i; R_i') = \begin{cases} -\dfrac{1}{K_{n_i}} f_{K_{n_i} L_i}(R_i)\, h_{K_{n_i} L_i}(R_i') & \text{при } R_i' > R_i, \\ -\dfrac{1}{K_{n_i}} f_{K_{n_i} L_i}(R_i')\, h_{K_{n_i} L_i}(R_i) & \text{при } R_i > R_i', \end{cases} \qquad (3)$$

$$G^{(\pm)}_{k_i l_i}(\rho_i; \rho_i') = \begin{cases} \varphi^{(1)}_{k_i l_i}(\rho_i)\, \varphi^{(2)}_{k_i l_i}(\rho_i') & \text{при } \rho_i' > \rho_i, \\ \varphi^{(1)}_{k_i l_i}(\rho_i')\, \varphi^{(2)}_{k_i l_i}(\rho_i) & \text{при } \rho_i > \rho_i'. \end{cases} \qquad (4)$$

$\varphi^{(1)}_{k_i l_i}$ и $\varphi^{(2)}_{k_i l_i}$ — два линейно-независимых решения уравнения

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_i^2} + k_i^2 - V_i - \frac{l_i(l_i+1)}{\rho_i^2} \right] \varphi_{k_i l_i}(\rho_i) = 0 \qquad (5)$$

с асимптотикой [10]

$$\varphi^{(1)}_{k_i l_i} \underset{\rho_i \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(k_i\rho_i - \frac{\pi l_i}{2} + \delta_{l_i}\right); \quad \varphi^{(2)}_{k_i l_i} \underset{\rho_i \to \infty}{\sim} e^{\pm i\left(k_i\rho_i - \frac{\pi l_i}{2} + \delta_{l_i}\right)}, \qquad (6)$$

$\varphi_{n_i l_i}$ — решение уравнения (5) при $\varepsilon_i < 0$, N_i — число связанных состояний в системе $(j + k)$, $f_{K_{n_i} L_i}$ и $h_{K_{n_i} L_i}$ связаны с функциями Бесселя j_{L_i} и n_{L_i} следующим образом:

$$f_{K_{n_i}L_i} = K_{n_i} R_i j_{L_i}(K_{n_i} R_i); \; g_{K_{n_i}L_i} = -K_{n_i} R_i n_{L_i}(K_{n_i} R_i);$$

$$h_{K_{n_i}L_i} = f_{K_{n_i}L_i} + i g_{K_{n_i}L_i}$$

$(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i)$, $i = 1, 2, 3$ — координаты Якоби и

$$M_i = (m_k + m_j) m_i/(m_i + m_k + m_j); \; \mu_i = m_j m_k/(m_j + m_k);$$

$$K_{n_i}^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_{n_i}); \; K_i^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_i); \; k_i^2 = \frac{2\mu_i}{\hbar^2}\varepsilon_i. \tag{7}$$

Каждое слагаемое в (2) соответствует определенному процессу. Первый член (сумма) в фигурной скобке описывает прямые и перераспределенные каналы с возбуждением, последний — канал развала.

Волновая функция $\Psi^i(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i)$ зависит от двух координат. Однако ясно, что для определения полного сечения в канале развала (например, в реакции $i+(k+j)\to i+j+k$) достаточно найти поток только одной из частиц, скажем i. Для этого удобно воспользоваться разложением $\Psi^i(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i)$ по полному набору волновых функций системы частиц $(j+k)$, как это делается в дифференциальном подходе.

Сведение уравнений Фаддеева к системе алгебраических уравнений

Будем исходить из дифференциальной формы системы уравнений (1):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M_i}\Delta_{\vec{R}_i} - \frac{\hbar^2}{2\mu_i}\Delta_{\vec{\rho}_i} + V_i(\rho_i) - E\right]\Psi^i(\vec{R}_i, \vec{\rho}_i) =$$

$$= -V_i(\rho_i)\,[\Psi^j(\vec{R}_j, \vec{\rho}_j) + \Psi^k(\vec{R}_k, \vec{\rho}_k)]. \tag{8}$$

Решение этой системы удобно искать в виде[1]

$$\Psi^i = \sum_{\mathscr{L}_i} \frac{Y_{L_iM_i} Y_{l_im_i}}{R_i\rho_i}\left[\sum_{n_i=1}^{N_i}\chi_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i)\,\varphi_{n_il_i}(\rho_i) + \int dk_i \chi_{k_i\mathscr{L}_i}(R_i)\,\varphi_{k_il_i}(\rho_i)\right]. \tag{9}$$

Для коэффициентов $\chi_{n_i\mathscr{L}_i}$ и $\chi_{k_i\mathscr{L}_i}$ разложения (9) получим систему зацепленных интегродифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2} + K_{n_i}^2 - \frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right]\chi_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i) = J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i), \tag{10}$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2} + K_i^2 - \frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right]\chi_{k_i\mathscr{L}_i}(R_i) = J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i),$$

где

$$J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i) = \sum_{j\neq i=1}^{3}\sum_{\mathscr{L}_j}\int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} d\rho_i W_{n_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j} \times$$

$$\times\left[\sum_{n_j=1}^{N_j}\varphi_{n_jl_j}\chi_{n_j\mathscr{L}_j} + \int dk_j \varphi_{k_jl_j}\chi_{k_j\mathscr{L}_j}\right], \tag{11}$$

[1] Здесь и в дальнейшем принято обозначение $\mathscr{L}_i = (L_i, M_i, l_i, m_i)$ и, например, $\chi_{k_i\mathscr{L}_i}(R_i)$ следует понимать как $\chi_{\mathscr{L}_i}(k_i, R_i)$, а $Y_{L_iM_i}$ — как $Y_{L_iM_i}(R_i)$.

$$J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i) = \sum_{j\neq i=1}^{3} \sum_{\mathscr{L}_j} \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} d\rho_i W_{K_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j} \times$$

$$\times \left[\sum_{n_j=1}^{N_j} \varphi_{n_j l_j} \chi_{n_j \mathscr{L}_j} + \int dk_j \varphi_{k_j l_j} \chi_{k_j \mathscr{L}_j} \right],$$

$$W_{n_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j} = \frac{2M_i}{\hbar^2} \frac{R_i\rho_i}{R_j\rho_j} \varphi^*_{n_i l_i} V_i Y^*_{L_i M_i} Y^*_{l_i m_i} Y_{L_j M_j} Y_{l_j m_j},$$

$$W_{K_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j} = \frac{2M_i}{\hbar^2} \frac{R_i\rho_i}{R_j\rho_j} \varphi^*_{k_i l_i} V_i Y^*_{L_i M_i} Y^*_{l_i m_i} Y_{L_j M_j} Y_{l_j m_j}. \tag{12}$$

Мы получили систему одномерных интегродифференциальных уравнений (10). При решении этой системы необходимо помнить, что неизвестные функции $\chi_{n_i\mathscr{L}_i}$ и $\chi_{k_i\mathscr{L}_i}$ должны удовлетворять определенным граничным условиям. Например, если одна из частиц рассеивается на двух других частицах, находящихся в связанном состоянии, то граничные условия имеют следующий вид:

$$\chi_{n_i\mathscr{L}_i} \xrightarrow[R_i\to 0]{} 0, \tag{13}$$

$$\chi_{n_i\mathscr{L}_i} \xrightarrow[R_i\to\infty]{} \delta_{p_0, n_i\mathscr{L}_i} f_{K_{n_i}L_i} + F_{K_{n_i}\mathscr{L}_i} h_{K_{n_i}L_i}$$

и

$$\chi_{k_i\mathscr{L}_i} \xrightarrow[R_i\to 0]{} 0,$$

$$\chi_{k_i\mathscr{L}_i} \xrightarrow[R_i\to\infty]{} F_{K_i\mathscr{L}_i} h_{K_i L_i}. \tag{14}$$

Здесь $F_{n_i\mathscr{L}_i}$ — парциальная амплитуда рассеяния прямого канала и канала с перераспределением частиц, $F_{K_i L_i}$ — парциальные амплитуды в канале развала. Индекс p_0 символа Кронекера $\delta_{p_0, n_i L_i}$ задает квантовые числа входного канала. Учитывая граничные условия (13) и (14), полученную систему уравнений перепишем в интегральной форме:

$$\chi_{n_i\mathscr{L}_i} = \delta_{p_0, n_i\mathscr{L}_i} f_{K_{n_i}L_i} + \int dR'_i G_{n_i L_i}(R_i; R'_i) J_{n_i\mathscr{L}_i}(R'_i),$$

$$\chi_{k_i\mathscr{L}_i} = \int dR'_i G_{K_i L_i}(R_i; R'_i) J_{K_i\mathscr{L}_i}(R'_i), \tag{15}$$

где $G_{n_i L_i}$ и $G_{K_i L_i}$ — функции Грина (3).

Переход от системы интегродифференциальных уравнений (10) к системе (15) законен, если функции $J_{n_i\mathscr{L}_i}$ и $J_{K_i\mathscr{L}_i}$ удовлетворяют условиям

$$\int dR_i \, |J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i)|^2 < \infty, \tag{16}$$

$$\int dR_i dk_i \, |J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i)|^2 < \infty. \tag{17}$$

Если потенциалы взаимодействия V_i удовлетворяют условию

$$\int d\rho_i \rho_i V_i(\rho_i) < \infty, \tag{18}$$

то (см. приложение) требования (16) и (17) удовлетворяются, и система уравнений (15) корректна.

При $R_i \to \infty$ из (15) нетрудно получить следующие формулы для определения парциальных амплитуд рассеяния:

$$F_{K_{n_i}\mathscr{L}_i} = -\frac{1}{K_{n_i}} \int dR_i f_{K_{n_i}L_i}(R_i)\, J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i), \tag{19}$$

$$F_{K_i\mathscr{L}_i} = -\frac{1}{K_i} \int dR_i f_{K_iL_i}(R_i)\, J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i).$$

Отметим, что систему уравнений (15) можно получить, подставляя разложение (9) в (2), т. е. не используя систему уравнений (8).

Рассмотрим приближенный метод решения полученных систем уравнений (10) и (15).

Поскольку функции $J_{n_i\mathscr{L}_i}$ и $J_{K_i\mathscr{L}_i}$ удовлетворяют условиям (16) и (17), то их можно разложить в обобщенный ряд Фурье по некоторому полному набору известных функций:

$$\begin{gathered} J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i) = \sum_\alpha A_\alpha^{n_i\mathscr{L}_i} \Phi_\alpha(R_i), \\ J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i) = \sum_{\beta\gamma} A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} \Phi_\beta(R_i)\, \Phi_\gamma(k_i), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} A_\alpha^{n_i\mathscr{L}_i} = \int dR_i \Phi_\alpha^*(R_i)\, J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i), \\ A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} = \int dR_i dk_i \Phi_\beta^*(R_i)\, \Phi_\gamma^*(k_i)\, J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i). \end{gathered} \tag{21}$$

Используя разложение (20), решение системы (10) или (15) и парциальные амплитуды рассеяния (19), получим в виде

$$\begin{gathered} \chi_{n_i\mathscr{L}_i} = \delta_{p_0, n_i\mathscr{L}_i} f_{K_{n_i}L_i} + \sum_\alpha A_\alpha^{n_i\mathscr{L}_i} \widetilde{\chi}_{\alpha n_i\mathscr{L}_i}, \\ \chi_{k_i\mathscr{L}_i} = \sum_{\beta\gamma} A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} \widetilde{\chi}_{\beta\gamma k_i\mathscr{L}_i} \end{gathered} \tag{22}$$

и

$$\begin{gathered} F_{K_{n_i}\mathscr{L}_i} = \sum_\alpha A_\alpha^{n_i\mathscr{L}_i} \widetilde{F}_{\alpha K_{n_i}\mathscr{L}_i}, \\ F_{K_i\mathscr{L}_i} = \sum_{\beta\gamma} A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} \widetilde{F}_{\beta\gamma k_i\mathscr{L}_i}, \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\chi}_{\alpha n_i\mathscr{L}_i} = \int dR_i' G_{n_iL_i}(R_i; R_i')\, \Phi_\alpha(R_i'), \\ \widetilde{\chi}_{\beta\gamma k_i\mathscr{L}_i} = \int dR_i' G_{K_iL_i}(R_i; R_i')\, \Phi_\beta(R_i')\, \Phi_\gamma(k_i) \end{gathered} \tag{24}$$

и

$$\begin{gathered} \widetilde{F}_{\alpha K_{n_i}\mathscr{L}_i} = -\frac{1}{K_{n_i}} \int dR_i f_{K_{n_i}L_i}(R_i)\, \Phi_\alpha(R_i), \\ \widetilde{F}_{\beta\gamma K_i\mathscr{L}_i} = -\frac{1}{K_i} \int dR_i f_{K_iL_i}(R_i)\, \Phi_\beta(R_i)\, \Phi_\gamma(k_i) \end{gathered} \tag{25}$$

известные функции.

Итак, мы представили решение уравнения (10) и парциальные амплитуды рассеяния в форме (22) и (23) через неизвестные коэффициенты разложения $A_{\alpha}^{n_i \mathscr{L}_i}$ и $A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i}$. Система алгебраических уравнений на эти коэффициенты получается путем подстановки (22) и (11) в (21):

$$\begin{aligned} &A_{\alpha}^{n_i\mathscr{L}_i} + \sum_{j\neq i=1}^{3} \sum_{\mathscr{L}_j} \Big[\sum_{n_j=1}^{N_j} \sum_{\alpha'} Q_{\alpha n_i \mathscr{L}_i}^{\alpha' n_j \mathscr{L}_j} A_{\alpha'}^{n_j \mathscr{L}_j} + \sum_{\beta\gamma} Q_{\alpha n_i \mathscr{L}_i}^{\beta\gamma \mathscr{L}_j} A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_j} \Big] = a_{\alpha}^{n_i \mathscr{L}_i}, \\ &A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} + \sum_{j\neq i=1}^{3} \sum_{\mathscr{L}_j} \Big[\sum_{n_j=1}^{N_j} \sum_{\alpha} Q_{\beta\gamma \mathscr{L}_i}^{\alpha n_j \mathscr{L}_j} A_{\alpha}^{n_j \mathscr{L}_j} + \sum_{\beta'\gamma'} Q_{\beta\gamma \mathscr{L}_i}^{\beta'\gamma' \mathscr{L}_j} A_{\beta'\gamma'}^{\mathscr{L}_j} \Big] = a_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i}, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$Q_{\alpha n_i \mathscr{L}_i}^{\alpha' n_j \mathscr{L}_j} = \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} dR_i d\rho_i \Phi_{\alpha}^{*}(R_i) W_{n_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} \varphi_{n_j l_j}(\rho_j) \widetilde{\chi}_{\alpha' n_j \mathscr{L}_j}(R_j),$$

$$Q_{\alpha n_i \mathscr{L}_i}^{\beta\gamma \mathscr{L}_j} = \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} dR_i\, d\rho_i \Phi_{\alpha}^{*}(R_i) W_{n_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} \int dk_j \varphi_{k_j l_j}(\rho_j) \widetilde{\chi}_{\beta\gamma k_j \mathscr{L}_j}(R_j),$$

$$Q_{\beta\gamma \mathscr{L}_i}^{\alpha n_j \mathscr{L}_j} = \int dk_i \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} dR_i d\rho_i \Phi_{\beta}^{*}(R_i) \Phi_{\gamma}^{*}(k_i) W_{K_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} \varphi_{n_j l_j}(\rho_j) \widetilde{\chi}_{\alpha n_j \mathscr{L}_j}(R_j),$$

$$\begin{aligned} Q_{\beta\gamma \mathscr{L}_i}^{\beta'\gamma' \mathscr{L}_j} = &\int dk_i \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} dR_i d\rho_i \Phi_{\beta}^{*}(R_i) \Phi_{\gamma}^{*}(k_i) W_{K \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} \times \\ &\times \int dk_j \varphi_{k_j l_j}(\rho_j) \widetilde{\chi}_{\beta'\gamma' k_j \mathscr{L}_j}(R_j), \end{aligned}$$

$$a_{\alpha}^{n_i \mathscr{L}_i} = \delta_{p_0, n_i \mathscr{L}_i} \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\vec{\rho}_i} dR_i d\rho_i W_{n_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} f_{K_{n_i} L_i} \Phi_{\alpha}^{*}(R_i), \tag{27}$$

$$a_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i} = \delta_{p_0, n_i \mathscr{L}_i} \int dk_i \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\Omega_{\rho_i} dR_i d\rho_i W_{K_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} f_{K_{n_i} L_i} \Phi_{\beta}^{*}(R_i) \Phi_{\gamma}^{*}(k_i).$$

Решая бесконечную систему (26) методом редукции (заменой бесконечной системы конечной), находим приближенные значения коэффициентов разложения $A_{\alpha}^{n_i \mathscr{L}_i}$ и $A_{\beta\gamma}^{\mathscr{L}_i}$. Некоторые вопросы корректности такой процедуры были рассмотрены в работах [11]. Подставляя эти коэффициенты в (22) и (23), получаем волновые функции и парциальные амплитуды каждого канала и тем самым решение поставленной задачи рассеяния.

В матричные элементы (27) входят локальные двухчастичные потенциалы V_i. Если каждый из потенциалов V_i $(i=1, 2, 3)$ имеет отталкивающий бесконечный кор при $\rho_i \leqslant b_i$ $(i=1, 2, 3)$, то произведение $V_i \varphi_{k_i l_i}$ можно представить в следующем виде [12]:

$$V_i \varphi_{k_i l_i} = \begin{cases} \lambda_{k_i l_i} \delta(\rho_i - b_i) \text{ при } \rho_i \leqslant b_i, \\ V_i^{\text{глад}} \varphi_{k_i l_i} \text{ при } \rho_i > b_i, \end{cases} \tag{28}$$

где значение $\lambda_{k_i l_i}$ определяется граничными условиями для $\varphi_{k_i l_i}$ в точке $\rho_i = b_i$ $(\varphi_{k_i l_i}(b_i) = 0)$ и $V_i^{\text{глад}}$ — гладкая часть потенциала.

Так как в матричные элементы (27) двухчастичный потенциал и волновая функция входят в виде произведения, то существование кора в потенциале V_i не приводит к трудностям, в чем можно немедленно убедиться, подставляя (28) в (27).

Одной из особенностей уравнений Фаддеева в координатном представлении является то, что их всегда можно представить в виде системы уравнений Вольтерра второго рода, для которых ряд, полученный методом последовательных приближений, сходится всегда независимо от величины коэффициентов смешивания. Для решения системы уравнений (15) перепишем ее в виде

$$\chi_{n_i \mathscr{L}_i} = \delta_{p_0, n_i \mathscr{L}_i} f_{K_{n_i} L_i} + F_{K_{n_i} \mathscr{L}_i} h_{K_{n_i} L_i} +$$

$$+ \frac{1}{K_{n_i}} \left\{ h_{K_{n_i} L_i} \int\limits_{R_i}^{\infty} f_{K_{n_i} L_i} - f_{K_{n_i} L_i} \int\limits_{R_i}^{\infty} h_{K_{n_i} L_i} \right\} J_{n_i \mathscr{L}_i} (R_i') \, dR_i', \tag{29}$$

$$\chi_{k_i \mathscr{L}_i} = F_{K_i \mathscr{L}_i} h_{K_i L_i} + \frac{1}{K_i} \left\{ h_{K_i L_i} \int\limits_{R_i}^{\infty} f_{K_i L_i} - f_{K_i L_i} \int\limits_{R_i}^{\infty} h_{K_i L_i} \right\} J_{K_i \mathscr{L}_i}(R_i') \, dR_i'.$$

Система уравнений (29) является системой уравнений Вольтерра второго рода, и для них метод последовательных приближений сходится. При этом в качестве первого приближения берется асимптотика волновой функции, т. е.

$$\begin{aligned} \chi^{(1)}_{n_i \mathscr{L}_i} &= \delta_{p_0, n_i \mathscr{L}_i} f_{K_{n_i} L_i} + F_{K_{n_i} \mathscr{L}_i} h_{K_{n_i} L_i}, \\ \chi^{(1)}_{k_i \mathscr{L}_i} &= F_{K_i \mathscr{L}_i} h_{K_i L_i}. \end{aligned} \tag{30}$$

Тогда амплитуды рассеяния в первом приближении получаются подстановкой (30) в (19) и решением полученной системы. Продолжая этот процесс, мы получаем следующие приближения.

Приложение

Покажем, что функции $J_{n_i \mathscr{L}_i}$ и $J_{K_i \mathscr{L}_i}$ удовлетворяют условиям (16) и (17). Для этого второе равенство в (11) запишем так:

$$J_{K_i \mathscr{L}_i} (R_i) = \sum_{j \neq i = 1}^{3} \sum_{\mathscr{L}_j} \sum_{p=1}^{2} J^{(p)}_{k_i l_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j}, \tag{31}$$

где

$$J^{(p)}_{k_i l_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} = \int d\rho_i \rho_i V_i (\rho_i) \, \varphi^*_{k_i l_i} (\rho_i) \, I^{(p)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} (R_i, \rho_i), \quad p = 1, 2 \tag{32}$$

и

$$I^{(1)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} (R_i, \rho_i) = \int d\Omega_{\vec{\rho}_i} d\Omega_{\vec{R}_i} \frac{R_i}{R_j \rho_j} \sum_{n_j = 1}^{N_j} \varphi_{n_j l_j} (\rho_j) \, \chi_{n_j \mathscr{L}_j} (R_j) \, \Omega_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j}, \tag{33}$$

$$I^{(2)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} (R_i, \rho_i) = \int d\Omega_{\vec{\rho}_i} d\Omega_{\vec{R}_i} \frac{R_i}{R_j \rho_j} \int dk_j \varphi_{k_j l_j} (\rho_j) \, \chi_{k_j \mathscr{L}_j} (R_j) \, \Omega_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j}, \tag{34}$$

$$\Omega_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} = \frac{2M_i}{\hbar^2} Y^*_{L_i M_i} (\vec{R}_i) \, Y^*_{l_i m_i} (\vec{\rho}_i) \, Y_{L_j M_j} (\vec{R}_j) \, Y_{l_j m_j} (\vec{\rho}_j). \tag{35}$$

Покажем, что функции $J^{(p)}_{k_i l_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j}$ при любых квантовых числах $\{k_i l_i \mathscr{L}_i \mathscr{L}_j\}$ удовлетворяют условиям (17). Тогда для конечного ряда по $\mathscr{L}_j$ в (31) функция $J_{K_i \mathscr{L}_i}$ также будет удовлетворять условию (17).

Используя разложения

$$\rho_i V_i (\rho_i) \, I^{(p)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j} (R_i, \rho_i) = \sum_{n_i = 1}^{N_i} B^{(p)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j n_i l_i} (R_i) \, \varphi_{n_i l_i} (\rho_i) + \int dk_i B^{(p)}_{\mathscr{L}_i \mathscr{L}_j k_i l_i} (R_i) \, \varphi_{k_i l_i} (\rho_i), \tag{36}$$

где

$$B^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j n_i l_i}(R_i)=\int d\rho_i\varphi^*_{n_i l_i}(\rho_i)\,\rho_i V_i(\rho_i)\,I^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i,\rho_i), \tag{37}$$

$$B^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j k_i l_i}(R_i)=\int d\rho_i\varphi^*_{k_i l_i}(\rho_i)\,\rho_i V_i(\rho_i)\,I^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i,\rho_i), \tag{38}$$

и учитывая, что $B^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j k_i l_i}=J^{(p)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}$, имеем

$$\int dk_i\,|\,J^{(p)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\,|^2=-\sum_{n_i=1}^{N_i}|\,B^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j n_i l_i}(R_i)\,|^2+\int d\rho_i\,|\,\rho_i V_i I^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}\,|^2. \tag{39}$$

Интегрируя обе части последнего равенства по R_i, получаем

$$\int dR_i\int dk_i\,|\,J^{(p)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\,|^2=-\sum_{n_i=1}^{N_i}\int dR_i\,|\,B^{(p)}_{n_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\,|^2+$$

$$+\int dR_i\int d\rho_i\,|\,\rho_i V_i I^{(p)}_{\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}\,|^2. \tag{40}$$

Остается показать сходимость интегралов в первой части (40) при $p=1, 2$. Так как потенциал V_i удовлетворяет условию (18) и $\varphi_{n_j l_j}(\rho_j)$ есть волновая функция связанного состояния (при больших ρ_j затухает экспоненциально), то при $p=1$ интегралы в правой части (40) сходятся. При $p=2$ $\varphi_{k_j l_j}$ является функцией непрерывного спектра (при больших ρ_j не затухает), но в этом случае мы имеем дополнительное интегрирование по k_j, т. е.

$$\int_0^\infty dk_j\varphi_{k_j l_j}(\rho_j)\,\chi_{k_j\mathscr{L}_j}(R_j)=\int_0^E dk_j\varphi_{k_j l_j}(\rho_j)\,\chi_{k_j\mathscr{L}_j}(R_j)+\int_E^\infty dk_j\varphi_{k_j l_j}(\rho_j)\,\chi_{k_j\mathscr{L}_j}(R_j), \tag{41}$$

где первый интеграл соответствует открытым каналам, второй — закрытым. Второй интеграл в (41) затухает экспоненциально при больших R_j. Применяя метод стационарной фазы к первому интегралу в (41), можно убедиться, что он убывает при $R_j\to\infty$ как $1/\sqrt{R_j}$, что и обеспечивает сходимость интегралов в первой части (40).

Из всего сказанного следует, что

$$\int dR_i dk_i\,|\,J^{(p)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\,|^2<\infty,\quad p=1,\,2, \tag{42}$$

т. е. условие (17) выполняется. Таким же образом можно показать выполнение условий (16).

Приведем оценки степени убывания функций $J^{(p)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)$ (т. е. $J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i)$) при $R_i\to\infty$. Заменяя $\varphi_{n_j l_j}(\rho_j)$ на $1/\rho_j^n$ и мажорируя подынтегральную функцию в (33), имеем

$$J^{(1)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\sim 1/R_i^{n+1}.$$

Если канал развала закрыт (функции $\chi_{k_j\mathscr{L}_j}(R_j)$ при больших R_j затухают экспоненциально), то для $J^{(2)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}$ получаем тот же результат, а при энергиях выше порога развала $J^{(2)}_{k_i l_i\mathscr{L}_i\mathscr{L}_j}(R_i)\sim 1/R_i^{3/2}$.

Отсюда видно, что функции $J_{n_i\mathscr{L}_i}$ и $J_{K_i\mathscr{L}_i}$ удовлетворяют более жесткому условию:

$$\int dR_i\,|\,J_{n_i\mathscr{L}_i}(R_i)\,|<\infty,\quad \int dR_i\,|\,J_{K_i\mathscr{L}_i}(R_i)\,|<\infty$$

при любых фиксированных k_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feshbach H. «Ann. of. Phys.», **5**, 357, 1958; **19**, 287, 1962.
2. Электронно-атомные столкновения. Изд-во АН ЛатвССР, 1965; Рассеяние электронов на атомах. Изд-во ЛатвССР, 1967.
3. Амирханов И. В., Смедарчина З. К., Христова Е. Х. «Журнал теоретич. и математ. физики», **3**, вып. 3, 392, 1970.
4. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. «Ядерная физика», **3**, 1032, 1966; Симонов Ю. А. «Ядерная физика», **3**, 630, 1966.
5. Altick P. L. «Phys. Rev.», **179**, 73, 1969.
6. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
7. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Препринт ИТФ АН УССР, 68-11. Киев, 1968.
8. Беляев В. Б., Вжеционко Е. Препринт Р4-4144. Дубна, 1968; Ахмадходжаев Б., Беляев В. Б., Вжеционко Е. Препринт ИТФ, 69-49. Киев, 1969.
9. Aaron R., Amado R. D. «Phys. Rev.», **150**, 857, 1966; Hetherington J. H., Schick L. H. «Phys. Rev.», **B137**, 935, 1965.
10. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в перелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.
11. Амирханов И. В., Гурьянов В. С. Препринт ОИЯИ Р4-3741. Дубна, 1968; Амирханов И. В., Касымжанов И. А. Препринт ОИЯИ, Р4-4336. Дубна, 1969.
12. Бракнер К. Теория ядерной материи. М., «Мир», 1964.
13. Ahmadzaden A. Tjon J. A. «Phys. Rev.», **139**, 4B, 1085, 1965.

Поступила в редакцию
5.8 1971 г.

НИИЯФ