

Г. А. БЕНДРИКОВ, У. ФОНЕСКА АРАУХО

ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ИХ СВЯЗЬ С МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе получены общие формулы различных частотных характеристик в функции коэффициентов полиномов передаточной функции разомкнутой системы (или коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы). Эти формулы необходимы для построения амплитудно-фазовых характеристик, D -разбиения по одному параметру, кривых Найквиста, Михайлова и Попова для систем n -го порядка на ЦВМ. Показана связь между указанными частотными критериями устойчивости и уравнениями критических частот и критического параметра аналитического метода траекторий корней.

Построения частотных характеристик различных видов обычно сопровождаются сложными вычислениями [1]. Однако, используя некоторое тождественное преобразование целых полиномов от $p = \delta + j\omega$ [2], возможно получить общие аналитические выражения для частотных характеристик, если заданы коэффициенты полиномов передаточной функции разомкнутой системы или заданы коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы со свободным параметром. Наличие свободного параметра позволяет построить семейство частотных характеристик.

Преимущество этих аналитических выражений, благодаря их тесной связи с методом траекторий корней, заключается в том, что возможно предсказать некоторые особенности системы без полного построения частотных характеристик, как например, число возможных критических частот [2] и т. д.

Получение формул общего вида для систем n -го порядка необходимо для построения частотных характеристик на ЦВМ по стандартной программе. Эти формулы позволяют значительно уменьшить объем вычислений.

§ 1. Общие формулы для построения частотных характеристик

Пусть передаточная функция разомкнутой системы задана в виде

$$KG(p) = \frac{K\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} = K \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (1)$$

где $n \geq m$ и K — любой свободный параметр, линейно-входящий в некоторые коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы.

Как известно, амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы имеет вид в декартовых координатах:

$$KG(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2)$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики соответственно. Или в полярных координатах:

$$KG(j\omega) = |KG(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}, \quad (3)$$

где $|KG(j\omega)|$ — амплитудно-частотная и $\theta(\omega)$ — фазово-частотная характеристики.

Используем следующее тождественное преобразование целых полиномов от p [2]:

$$\Phi_n(p) = \Phi_n(\delta + j\omega) = \Phi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega^2), \quad (4)$$

где

$$\Phi_r(\delta, \omega^2) = \Phi_n^{(0)}(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n^{(2)}(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{(4)}(\delta) - \dots$$

$$\Phi_j(\delta, \omega^2) = \Phi_n^{(1)}(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n^{(3)}(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{(5)}(\delta) - \dots$$

В формулах цифрами (в скобках) обозначен порядок производной по δ . Аналогичные формулы имеют место для функции $\Psi_m(p)$.

Формулы для вещественных и мнимых частотных характеристик.

Подставляя в уравнение (1) формулы (4), запишем (2) в виде

$$KG(p) = K \frac{\Phi_r\Psi_r + \omega^2\Phi_j\Psi_j}{\Phi_r^2 + \omega^2\Phi_j^2} + j\omega K \frac{\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r}{\Phi_r^2 + \omega^2\Phi_j^2}. \quad (5)$$

Полагаем в уравнении (5) $\delta=0$. Собирая в нем члены с одинаковыми степенями ω , получаем:

$$KG(j\omega) = K \frac{h_0 - h_2\omega^2 + h_4\omega^4 - h_6\omega^6 + \dots}{H_0 - H_2\omega^2 + H_4\omega^4 - H_6\omega^6 + \dots} + jK \frac{h_1\omega - h_3\omega^3 + h_5\omega^5 - h_7\omega^7 + \dots}{H_0 - H_2\omega^2 + H_4\omega^4 - H_6\omega^6 + \dots}, \quad (6)$$

где

$$h_0 = a_n b_m,$$

$$h_1 = (a_n b_{m-1} - a_{n-1} b_m),$$

$$h_2 = (a_n b_{m-2} - a_{n-1} b_{m-1} + a_{n-2} b_m),$$

$$h_3 = (a_n b_{m-3} - a_{n-1} b_{m-2} + a_{n-2} b_{m-1} - a_{n-3} b_m),$$

$$h_4 = (a_n b_{m-4} - a_{n-1} b_{m-3} + a_{n-2} b_{m-2} - a_{n-3} b_{m-1} + a_{n-4} b_m),$$

.....

$$H_0 = a_n^2,$$

$$H_2 = (2a_{n-2} a_n - a_{n-1}^2),$$

$$\begin{aligned}
 H_4 &= (2a_{n-4} a_n - 2a_{n-3} a_{n-1} + a_{n-2}^2), \\
 H_6 &= (2a_{n-6} a_n - 2a_{n-5} a_{n-1} + 2a_{n-4} a_{n-2} - a_{n-3}^2) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

(индексы a и b положительные числа или нули).

Или

$$KG(j\omega) = K \frac{\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}} + jK \frac{\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}}, \quad (7)$$

где

$$A_{2i} = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j a_{n-j} b_{m-2i+j}, \quad (8)$$

$$B_{2i} = (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} 2[(-1)^{2i-j} a_{n-j} a_{n-2i+j}] + (-1)^i a_{n-i} a_{n-i} \right\}, \quad (9)$$

$$C_{2i+1} = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j a_{n-j} b_{m+j-(2i+1)}, \quad (10)$$

$i, j = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$$l = \frac{n+m}{2}, \text{ если } n+m \text{ четное;}$$

$$l = \frac{n+m-1}{2}, \text{ если } n+m \text{ нечетное;}$$

$$q = \frac{n+m-2}{2}, \text{ если } n+m \text{ четное,}$$

$$q = \frac{n+m-1}{2}, \text{ если } n+m \text{ нечетное}$$

(индексы при коэффициентах a и b положительные числа или нули).

Формулы для амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик. Возможно также получение общих формул для амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик (3) при заданной передаточной функции разомкнутой системы (1). Действительно, из уравнений (3), (7)–(10) получаем амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы через коэффициенты a_i, b_i полиномов, составляющих передаточную функцию

$$|KG(j\omega)| = \frac{K}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}} \sqrt{\left(\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1} \right)^2} \quad (11)$$

и соответствующую ей фазово-частотную характеристику

$$\theta(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i}} \right). \quad (12)$$

Используя уравнения (11) и (12), можно построить амплитудно-частотную и фазово-частотную кривую для разомкнутой системы любого порядка. Задавая в уравнении (11) разные значения, линейно входящему в коэффициенты характеристического уравнения, свободному параметру K , получаем семейство характеристик.

Заметим, что при значениях $\theta = N\pi$, где $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ из уравнения (12) можно определить критические частоты системы [2], см. § 2.

§ 2. Общие формулы для построения кривых Найквиста

Перейдем к изложению использования общего вида амплитудно-фазовых характеристик для построения кривых Найквиста.

Линейные системы. Как известно [3], уравнение кривой Найквиста имеет вид

$$\varphi(j\omega) = 1 + KG(j\omega) = 1 + U(\omega) + jV(\omega). \quad (13)$$

Подставляя в (13) выражения для $U(\omega)$ и $V(\omega)$ заданные уравнением (7), получаем уравнение кривых Найквиста для характеристического уравнения n -го порядка. Но так как [3] от годографа $\varphi(j\omega)$ легко перейти к годографу $KG(j\omega)$, т. е. к годографу амплитудно-фазовой характеристики, даваемой уравнениями (6) или (7), мы будем рассматривать годограф $KG(j\omega)$ на плоскости (U, V) . В этой плоскости, когда кривая $KG(j\omega)$ проходит через точку $(-1, j0)$, рассматриваемая система находится на границе устойчивости, т. е. имеют место следующие соотношения:

$$\text{Im}[KG(j\omega)] = 0, \quad \text{Re}[KG(j\omega)] = -1.$$

Откуда

$$\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega_k^{2i+1} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega_k^{2i}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega_k^{2i}} = -\frac{1}{K_k}. \quad (15)$$

Из уравнения (14) определяем критические частоты, а из уравнения (15) получаем критические значения параметра.

Уравнение критических частот, получаемое из уравнения траекторий корней при $\delta=0$ [2], определяет собственные частоты системы на границе устойчивости. Формула параметра траекторий корней в этом случае дает значение свободного параметра, при котором осуществляется выход корней на границу устойчивости.

Следует заметить.

1) Числитель мнимой части уравнения (7) представляет собой уравнение критических частот, поэтому по степени этого полинома уже можно предсказать возможное число собственных частот системы, соответствующих границе устойчивости при наличии в системе как отрицательной, так и положительной обратной связи.

2) В уравнении (14) решение $\omega=0$ определяет аperiodическую потерю устойчивости.

3) Уравнение критических частот более низкого порядка, чем порядок характеристического полинома. Так, для систем, в которых $n+m \leq 10$, степень уравнения критических частот не превышает 4 ($\omega^2=x$).

4) Только действительные и положительные корни уравнения (14) имеют физический смысл.

При построении кривых Найквиста в плоскости (u, v) удобно найти точки пересечения кривой с мнимой и действительной осью. Для этого надо найти действительные корни уравнений

$$\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} = 0 \quad (16)$$

и

$$\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1} = 0. \quad (17)$$

Если подставить корни уравнения (16) в мнимую часть уравнения (7) и корни уравнения (17) в действительную часть того же уравнения, получаем точки пересечения кривой Найквиста с мнимой и действительной осью плоскости (U, V) соответственно.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы (1) в виде

$$\begin{aligned} KG(p) &= \frac{K_i(p+1)}{p(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)} = \\ &= \frac{K(p+1)}{p^5 + 14p^4 + 71p^3 + 154p^2 + p}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя уравнение (6) или (7) для $n=5$ и $m=1$, получаем

$$\begin{aligned} KG(j\omega) &= K \frac{-34 - 57\omega^2 + \omega^4}{14,4 \cdot 10^3 + 6676\omega^2 + 969\omega^4 + 54\omega^6 + \omega^8} + \\ &+ jK \frac{-120 - 83\omega^2 + 13\omega^4}{14,4 \cdot 10^3\omega + 6676\omega^3 + 969\omega^5 + 54\omega^7 + \omega^9} = U + jV. \end{aligned} \quad (19)$$

При $V=0$ получим, $13x^2 - 83x - 120 = 0$, т. е. уравнения критических частот для этой системы ($\omega^2=x$). Решая это уравнение, найдем, что при некотором значении свободного параметра K_h система переходит границу устойчивости при $\omega = \pm 2,75$. Подставляя значения $\omega = \pm 2,75$ в действительную часть уравнения (19), найдем точки пересечения диаграмм Найквиста с действительной осью ($u = -2,776 \cdot 10^{-3} K$). Из уравнений (14) и (15) получается значение критического параметра $K_h = 360$.

При $U=0$ найдутся значения ω , при которых кривая проходит через мнимую ось, для рассматриваемой системы $\omega = \pm 7,75$. Подставляя эти значения ω в мнимую часть (19), получаем точки пересечения кривой с мнимой осью ($V = 2,136 \cdot 10^{-4} K$). На рис. 1, а показан годограф функции (19), нарисованный не в масштабе для $K=10, 100$ и 1000 .

Однако при известных критических параметрах (ω_h, K_h) для устойчивых разомкнутых систем можно значительно проще исследовать устойчивость систем методом траекторий корней.

Линейные системы с чистым запаздыванием. Таким же образом можно получить аналитическое выражение кривых Найквиста для систем с чистым запаздыванием. В этом случае имеется:

$$KG(j\omega) e^{-j\omega\tau} = K \frac{\cos \omega\tau \sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} + \sin \omega\tau \sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}} +$$

$$+ jK \frac{\cos \omega\tau \sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1} - \sin \omega\tau \sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}}, \quad (20)$$

где τ время запаздывания, а остальные обозначения даны выше.

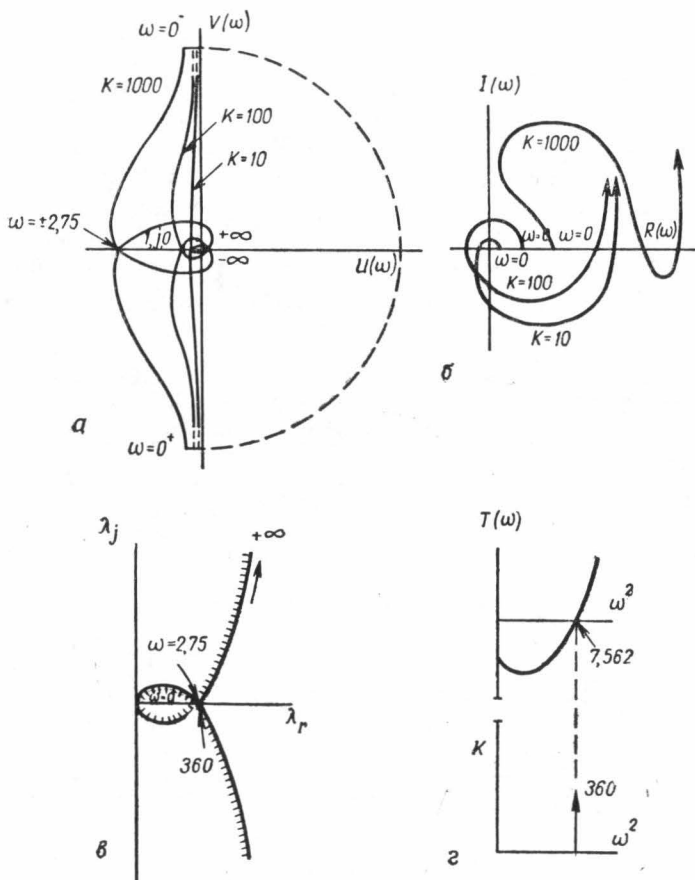


Рис. 1

Из уравнения (20) и при условии

$$\operatorname{Re}[Kg(j\omega) e^{-j\omega\tau}] = -1, \quad \operatorname{Im}[Kg(j\omega) e^{-j\omega\tau}] = 0$$

получаем уравнение критических частот

$$\operatorname{tg} \omega_k \tau = \frac{\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega_k^{2i+1}}{\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega_k^{2i}}. \quad (21)$$

и формулу для критического параметра

$$K_k = \frac{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}}{\cos \omega \tau \sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} + \sin \omega \tau \sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1}} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} \right)}{\left(\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1} \right)^2} \sec \omega \tau. \quad (22)$$

§ 3. Общие формулы для построения кривых Михайлова

С помощью преобразования (4) можно получить уравнения кривых Михайлова как функцию частоты ω , коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы и свободного параметра, влияние которого на устойчивость выясняется построением семейства кривых Михайлова.

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$F(p) = \Phi_n + K\Psi_m = (\Phi_r + K\Psi_r) + j\omega(\Phi_j + K\Psi_j) = 0, \quad (23)$$

где K — любой свободный параметр, линейно входящий в $(m+1)$ коэффициент характеристического уравнения, Φ_n и Ψ_m полиномы вида (1).

Используя тождественное преобразование (4), уравнение (23) при $\delta=0$ принимает вид

$$F(j\omega) = [(a_n + Kb_m) - (a_{n-2} + Kb_{m-2})\omega^2 + (a_{n-4} + Kb_{m-4})\omega^4 - \dots] +$$

$$+ j\omega[(a_{n-1} + Kb_{m-1}) - (a_{n-3} + Kb_{m-3})\omega^2 + (a_{n-5} + Kb_{m-5})\omega^4 - \dots] =$$

$$= R(\omega, K) + jI(\omega, K), \quad (24)$$

где

$$R(\omega, K) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (a_{n-2i} + Kb_{m-2i}) \omega^{2i},$$

$$I(\omega, K) = \sum_{i=0}^s (-1)^i (a_{n-(2i+1)} + Kb_{m-(2i+1)}) \omega^{2i+1},$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

$$r = \frac{n}{2}, \quad s = \frac{n-2}{2}, \quad \text{если } n \text{ четное;}$$

$$r = \frac{n-1}{2}, \quad s = \frac{n-1}{2}, \quad \text{если } n \text{ нечетное.}$$

Как известно [3], критерий устойчивости Михайлова гласит: для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до $+\infty$ кривая на плоскости (R, I) , описываемая уравнением (24), проходила против часовой стрелки через n квадрантов, где n — порядок характеристического уравнения.

При изменении свободного параметра K от 0 до $+\infty$ кривая Михайлова, вообще говоря, может проходить несколько раз через начало координат плоскости (R, I) при этом

$$R(\omega_k, K) = 0, \quad (25)$$

$$I(\omega_k, K) = 0. \quad (26)$$

Исключая параметр K из уравнений (25) и (26), получаем уравнение критических частот (14). Подставляя значение ω_k в уравнения (25) и (26), получаем критическое значение свободного параметра K_k . Поэтому, когда кривая Михайлова проходит через начало координат плоскости $R(\omega, K), I(\omega, K)$, система находится на границе устойчивости.

Для построения кривых Михайлова может быть удобнее сначала решить уравнения (25) и (26) ($\omega^2 = x$).

Пример.

Пусть задано характеристическое уравнение замкнутой системы [4] в виде

$$p(p-1)(p+10)^2 + K(p+1) = p^4 + 19p^3 + 80p^2 - 100p + K(p+1) = 0.$$

Из уравнения (24) получаем

$$R(\omega, K) = K - 80\omega^2 + \omega^4,$$

$$I(\omega, K) = (K - 100)\omega - 19\omega^3.$$

Полагая, что

$$R(\omega, K) = K - 80\omega^2 + \omega^4 = 0, \quad (27)$$

$$I(\omega, K) = (K - 100)\omega - 19\omega^3 = 0 \quad (28)$$

и исключая K из этих уравнений, получаем

$$\omega_{k1} = 1,3 \text{ и } \omega_{k2} = 7,70. \quad (29)$$

Подставляя (29) в уравнение (28), найдем

$$K_{k1} = 132,03 \text{ и } K_{k2} = 1226,96.$$

Знание критических частот и параметра позволяет построить по обычной методике кривые Михайлова и определить область устойчивости системы по параметру K .

Действительно, если задавать значения параметра меньшие и большие критических, то по кривой Михайлова узнаем область устойчивости системы во всем интервале значений свободного параметра (см. рис. 2 для $K_1=1, K_2=100, K_{k1}=132, K_3=200, K_4=1000, K_{k2}=1226, K_5=2000$, рис. 2 построен не в масштабе). Из рис. 2 видно, что система устойчива в интервале $K_{k1} < K < K_{k2}$.

В данном примере обеим критическим частотам соответствуют значения параметра K_{k1} и K_{k2} одного знака. Это значит, что границу устойчивости переходит одна и та же ветвь траекторий корней, т. е. система по отношению к данному параметру K является условно-устойчивой.

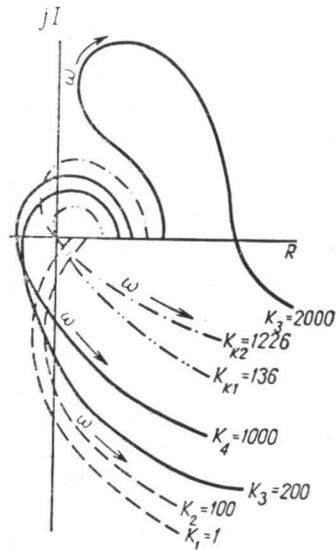


Рис. 2

§ 4. D-разбиение по одному параметру

С помощью преобразования (4) также возможно получить общую формулу для построения граничной кривой D -разбиения [5] в плоскости одного комплексного параметра λ . Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид (23). Тогда заменяя в уравнении (23) K на λ и разрешая это уравнение относительно λ , получим

$$\lambda = -\frac{\Phi_n(p)}{\Psi_m(p)}. \quad (30)$$

Используя тождество (4) при $\delta=0$, уравнение (30) можно преобразовать:

$$\lambda = -\frac{\sum_{i=0}^l A_{2i}\omega^{2i}}{\sum_{i=0}^m D_{2i}\omega^{2i}} + j \frac{\sum_{i=0}^q C_{2i+1}\omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^m D_{2i}\omega^{2i}} = \lambda_r + j\lambda_j, \quad (31)$$

где

$$D_{2i} = (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} 2[(-1)^{2i-j} b_{m-j} b_{m-2i+j}] + (-1)^i b_{m-i} b_{m-i} \right\}.$$

Эта формула аналогична формуле (9). Числители выражения (31) заданы уравнениями (8) и (9).

Обычно на практике параметр λ действителен, т. е. выполняется условие $\text{Im}[\lambda]=0$, поэтому из уравнения (31) получим

$$\text{Re}[\lambda] = -\frac{\sum_{i=0}^l A_{2i}\omega^{2i}}{\sum_{i=0}^m D_{2i}\omega^{2i}} \quad (32)$$

и

$$\sum_{i=0}^q C_{2i+1}\omega^{2i+1} = 0. \quad (14')$$

Уравнение (14') представляет собой уравнение критических частот. Из уравнения (32) при условии $\omega=\omega_k$ определяется критическое значение параметра.

Рассмотрим пример D -разбиения для системы [5; 1], описываемой уравнением (18). Используя уравнение (31), получим

$$\lambda = -\frac{-34\omega^2 - 57\omega^4 + \omega^6}{1 + \omega^2} + j \frac{-120\omega - 83\omega^3 + 13\omega^5}{1 + \omega^2}.$$

На рис. 1, в показана граничная кривая D -разбиения (не в масштабе). Отсюда видно, что система устойчива при действительных значениях λ , лежащих в интервале $0 < \lambda < 360$.

Как и метод D -разбиения, метод траекторий корней позволяет определить континуум устойчивых систем при изменении свободного параметра в области устойчивости. Как известно [2], для определения устойчивости системы с передаточной функцией (18) методом траекторий корней, достаточно решить аналитически или графически уравнение критических частот (14), которое в нашем случае имеет вид

$$T(\omega^2) = -120 - 83\omega_k^2 + 13\omega_k^4 = 0$$

и $\omega_k = 0$ (в случае аperiodической потери устойчивости).

Формулы критического параметра дают

$$K_k = -\omega_k^4 + 71\omega_k^2 - 120$$

и $K_k = 0$ (при $K \leq 0$ система неустойчива). Отсюда получаем $\omega_k = \pm 2,79$ и $K_k = 360$. На рис. 1, а построен график $T(\omega^2)$ и указано значение K_k . Рассматриваемая разомкнутая система устойчива, поэтому замкнутая система устойчива при отрицательной обратной связи: $0 < K_k < 360$.

С целью сравнения объема вычислений при использовании разных методов для исследования устойчивости линейных систем построим еще кривые Михайлова для систем с передаточной функцией (18). В этом случае, используя уравнение (24), получим

$$F(j\omega) = (K - 154\omega^2 + 14\omega^4) + j\omega(120 + K - 71\omega^2 + \omega^4). \quad (33)$$

Легко видеть, что из уравнений (19) и (33) наиболее сложным является уравнение (19) (годограф Найквиста). На рис. 1, б показан (не в масштабе) годограф Михайлова для ряда значений параметра ($K=10$, $K=100$ и $K=1000$).

§ 5. Формулы для построения кривых Попова

Как известно [6, 7], об абсолютной устойчивости некоторых нелинейных систем можно судить по расположению на плоскости ($U, \omega V$) кривой $W^*(j\omega)$ относительно прямой Попова. Эта кривая связана с амплитудно-фазовой характеристикой линейной части системы $KG(j\omega) = U + jV$ следующими равенствами:

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) = U \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega V. \quad (34)$$

Поэтому согласно уравнениям (7) и (34)

$$\operatorname{Re} W^*(j\omega) = K \frac{\sum_{i=0}^l A_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}}, \quad (35)$$

$$\operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega K \frac{\sum_{i=0}^q C_{2i+1} \omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^n B_{2i} \omega^{2i}}. \quad (36)$$

Таким образом, при заданных коэффициентах характеристического уравнения a_i и b_i можно построить кривую Попова для систем любого порядка по формулам (35) и (36).

Полученные в работе формулы для построения различных частотных характеристик дают возможность сравнить необходимый объем вычислений и выбрать наиболее простой способ определения устойчивости систем заданного класса.

Следует заметить, что во многих случаях знание критических значений частот и свободного параметра достаточны для определения области устойчивости систем по параметру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осовский Л. М. К вопросам построения областей с фиксированным распределением корней алгебраических уравнений. В Трудах III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению. Многосвязные и инвариантные системы и др. М., «Наука», 1968.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн. 1, под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1967.
4. Саппон R. H. Jr., Dynamics of Physical Systems. Mc. Graw-Hill, 1967.
5. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. М., «Наука», 1966.
6. Попов В. М. «Автоматика и телемеханика», 22, № 8, 1961.
7. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1965.

Поступила в редакцию
6.9 1972 г.

Кафедра
физики колебаний