Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1973

М. А. ЭЛЬ ШАРНУБИ

О ДИНАМИЧЕСКОМ ЭКРАНИРОВАНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ЦЕНТРОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Рассматривается влияние эффекта динамического экранирования поля колеблющихся заряженных примесей свободными носителями заряда на рассеяние электронов такими примесями. Получена формула для потенциала как функции радиуса экранирования ($1/\varkappa$) и частоты колебаний примеси, из которой следует, что в данном случае существенно неупругое рассеяние; найден интеграл столкновений при рассеянии носителей на таком потенциале.

В теории рассеяния свободных носителей заряда на заряженных примесях экранировка примесного поля предполагается статической, при этом энергия взаимодействия электрона с примесным атомом не меняется со временем; потерей энергии электрона при рассеянии пренебрегают. Фактически экранировка поля, создаваемого колеблющейся примесью, должна быть динамической.

В данной статье рассматривается влияние динамического экранирования поля примесных атомов на рассеяние носителей заряда; получена формула для потенциала динамического экранирования, вычислен интеграл столкновений.

§ 1. Динамическое экранирование

Скалярный потенциал дается формулой [1]

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int dx' \, D_c(x, x') \, \rho(\vec{x}', t'), \tag{1}$$

где $x' = \{\vec{x}', t'\}$, $D_c(x, x')$ — фотонная функция Грина, $\rho(\vec{x}', t')$ — плотность заряда в точке $\vec{x}'$ в момент времени t'. Пусть заряженный атом примеси колеблется с частотой ω_0 и амплитудой $\vec{x}_0$, тогда

$$\rho(\vec{x}', t') = ze\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0 \cos\omega_0 t'), \tag{2}$$

где z — целое число.

С помощью преобразования Фурье

$$D_c(x, x') = \int d\vec{K} \, d\omega \, D_c(\vec{K}, \omega) \, e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}') + i\omega(t'-t)}, \tag{3}$$

на основании формул (1), (2) и (3) получим

$$\widetilde{\varphi}(x) = ze \int d\vec{K}\, d\omega\, D_c(\vec{K}, \omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{i\omega t' - i\vec{k}\cdot\vec{x}_0 \cos\omega_0 t'}. \qquad (4)$$

Используя уравнение Дайсона для функции D_c, можно преобразовать равенство (4) к виду

$$\widetilde{\varphi}(x) = ze \int d\vec{k}\, d\omega \frac{D_c^0(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}}{1 + (2\pi)^8 D_c^0(\vec{k})\, P(\vec{k}, \omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{i\omega t - i\vec{k}\,\vec{x}_0 \cos\omega_0 t'}. \qquad (5)$$

Здесь $P(\vec{K}, \omega)$ — поляризационный оператор, $D_c^0(\vec{K})$— невозмущенная функция Грина, которая в нерелятивистской приближении имеет вид

$$D_c^0(\vec{K}) = \frac{1}{(2\pi)^4 \vec{K}^2}. \qquad (6)$$

Как обычно, будем вычислять поляризационный оператор в первом неисчезающем приближении на константе связи. При этом [1]

$$P(\vec{K}, \omega) \cong P^0(\vec{K}, \omega) = \frac{2e^2}{(2\pi)^7} \int d\vec{K}'\, n^\circ(\vec{K}') \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{W(\vec{K}') - W(\vec{K}' - \vec{K}) - \omega + i\omega''} + \frac{1}{W(\vec{K}') - W(\vec{K}' - \vec{K}) + \omega - i\omega''} \right\}. \qquad (7)$$

Разложим $e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}_0 \cos\omega_0 t'}$ в ряд по бесселевым функциям [2]; тогда на основании (6) и (5) получим следующую формулу для потенциала:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{ze}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n (-1)^n \int d\vec{K} \frac{e^{i\vec{K}\cdot\vec{x} + in\omega_0 t}\, I_n(\vec{K}\,\vec{x}_0)}{\vec{K}^2 - (2\pi)^4 P^0(\vec{K}, -n\omega_0)}. \qquad (8)$$

В невырожденном случае и при квадратичном изотропном законе дисперсии вещественная и мнимая части поляризационного оператора имеют вид (в гауссовых единицах)

$$\mathrm{Re}\, P^0(\vec{K}, -n\omega_0) = \frac{-2\sqrt{\pi\beta}\,(4\pi e^2)\, e^{\beta\mu}}{(2\pi^6)\left(\frac{\hbar^2\beta}{2m}\right)^{3/2} W(k)^{1/2}} \int dy e^{-y^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left(\frac{\beta n\,\omega_0 y}{\sqrt{\beta W(\vec{k})}}\right) \sin\left(y\sqrt{\beta W(\vec{k})}\right) \right\},$$

$$Im\, P^0(\vec{K}, -n\omega_0) = \frac{-n_0 e^2 \sqrt{2\beta}}{(2\pi)^{5/2} W(\vec{k})}\, e^{\frac{-\beta W(\vec{k})}{4} - \frac{\beta n^2 \omega_0^2}{4W(\vec{k})}}\, \mathrm{sh}\, \frac{(\beta n\,\omega_0)}{2}.$$

Здесь $W(\vec{K}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$, n_0 — концентрация электронов

$$n_0 = \frac{(2\pi m K_0 T)^{3/2}}{4\pi^3 \hbar^3}\, e^{\beta\mu}.$$

На больших расстояниях от центра главную роль в интеграле (8) играют малые $\vec{K}$, т. е. $\beta W(\vec{K}) \ll 1$. В этой области мы рассмотрим два случая.

А. $$\frac{\beta n \omega_0}{\sqrt{\beta W(\vec{k})}} \leqslant \sqrt{\beta W(\vec{K})} < 1.$$

При этом вещественная часть поляризационного оператора не зависит от частоты колебаний примеси и имеет вид

$$\operatorname{Re} P^0(\vec{K}, -n\omega_0) = -\frac{4\pi e^2 n_0 \beta}{(2\pi)^4} = -\frac{\varkappa^2}{(2\pi)^4}. \tag{9}$$

Заметим также, что в рассматриваемых условиях

$$\frac{Im\, P^0(\vec{K}, -n\omega_0)}{\operatorname{Re} P^0(\vec{K}, -n\omega_0)} \ll 1,$$

из (9) и (8) следует, что

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{ze}{(2\pi)^4} \int d\vec{K} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{x}_0 \cos\omega_0 t)}}{\vec{K}^2 + \varkappa^2}.$$

Интегрируя по $\vec{K}$, получаем (переходя к гауссовым единицам)

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{ze\, e^{-\varkappa|\vec{x} - \vec{x}_0 \cos\omega_0 t|}}{|\vec{x} - \vec{x}_0 \cos\omega_0 t|}. \tag{10}$$

Такой вид потенциала был использован Кошино [3] в теории металлов.

Формула (10) справедлива при $\vec{k}\vec{x}_0 \cos\omega_0 t \ll 1$, т. е. при малой амплитуде колебаний.

Б. $$\sqrt{\beta W(\vec{K})} \ll 1 \ll \frac{\beta n \omega_0}{\sqrt{\beta W(\vec{K})}};\ n \neq 0. \tag{11}$$

В этом случае удобно разложить потенциал в (8) в ряд по амплитуде колебаний. Ограничиваясь членами первой степени по $\vec{k}\vec{x}_0$, получим

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{ze}{(2\pi)^3} \left[\int d\vec{K} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\vec{K}^2 + \varkappa^2} - \frac{i}{2} \int d\vec{K} \frac{\vec{K}\vec{x}_0\, e^{i\vec{k}\vec{x} + i\omega_0 t}}{\vec{K}^2 - (2\pi)^4 P^0(\vec{K}, -\omega_0)} - \right.$$
$$\left. - \frac{i}{2} \int d\vec{K} \frac{(\vec{K}\cdot\vec{x}_0)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_0 t}}{\vec{K}^2 - (2\pi)^4 P^0(\vec{K}, \omega_0)} \right]. \tag{12}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует $n=0$, остальные $n=+1$ и $n=-1$.

В данном случае мы имеем на основании (11) и (7)

$$\operatorname{Re} P^0(\vec{K}, \omega_0) = \operatorname{Re} P^0(\vec{K}, -\omega_0) = \frac{\vec{K}^2 \omega_p^2}{(2\pi)^4 \omega_0^2} \left\{ 1 + 0\left(\frac{\beta W(\vec{K})}{\beta^2 \omega_0^2} \right) \right\}. \tag{13}$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$ — плазменная частота. Заметим, что и в этом случае $\frac{Im\, P^0(\vec{K},\ \omega_0)}{\mathrm{Re}\, P^0(\vec{K},\ \omega_0)} \ll 1$. Подставляя (13) в (12) и интегрируя по $\vec{K}$, получаем

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{ze}{x}\left[e^{-\varkappa x} - \frac{x_0 \cos\omega_0 t \cos\beta}{(1-\omega_p^2/\omega_0^2)}\left\{2\,\delta(\bar{x}) - \frac{1}{x}\right\}\right]. \qquad (14)$$

Эта формула справедлива при $\omega_0 \neq \omega_p$ (в противном случае разложение по малой амплитуде не имеет смысла), следует отбросить также слагаемое с $\delta(\bar{x})$, ибо мы явно предполагали, что $\bar{x} \neq 0$.

Второй член в разложении чисто кулоновского потенциала совпадает со вторым членом в (9):

$$\frac{1}{\left|\vec{x} - \frac{\vec{x}_0 \cos\omega_0 t}{1-\omega_p^2/\omega_0^2}\right|} = \frac{1}{x} + \frac{x_0 \cos\omega_0 t \cos\beta}{x^2(1-\omega_p^2/\omega_0^2)}.$$

В дальнейшем исследовании особенно интересным оказывается случай (Б).

§ 2. Интеграл столкновений

Известно [4], что в кристаллах, содержащих примесные атомы, существуют локальные (целевые) колебания. Представляет интерес рассмотреть рассеяние носителей заряда на таких колебаниях. Для этой цели выразим смещение примесного атома через нормальные координаты

$$\vec{x}_0 \cos\omega_0 t = \sum_j \sqrt{\frac{\hbar}{2M_I\,\omega_0}}\, \vec{e}_j\,(a_j\, e^{i\omega_0 t} + a_j^*\, e^{-i\omega_0 t}). \qquad (15)$$

Здесь $\vec{e}_j$ — вектор поляризации, a_j и a_j^* — операторы уничтожения и порождения локальных фононов, ω_0 — частота локального фонона, M_I — масса заряженного примесного атома.

Предполагаем, что концентрация примесей не слишком велика и примеси расположены хаотично, так что можно пренебречь интерференцией волн, рассеянных разными примесными центрами. Ограничимся также борновским приближением. В рассматриваемых условиях интеграл столкновений для невырожденного электронного газа имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{VN_I}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}'\,\{W(\vec{p}',\,\vec{p})\,f(\vec{p}') - W(\vec{p},\,\vec{p}')\,f(\vec{p})\}. \qquad (16)$$

Здесь $W(\vec{p}, \vec{p}')$ — вероятность перехода электрона из состояния с волновым вектором $\vec{p}$ в состояние с волновым вектором $\vec{p}'$:

$$W(\vec{p},\,\vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\vec{p}'\,N_j' \mid e\widetilde{\varphi}(x) \mid \vec{p}N_j\rangle\right|^2 \delta\left(E_{p'} - E_p + \hbar\,\omega_0(N_j' - N_j)\right),$$

$f(\vec{p})$ — функция распределения электронов,

V — объем рассматриваемого кристалла, N_I — полное число примесей, N_j — квантовое число j-го осциллятора решетки.

$$n_I = \frac{N_I}{V}, \quad \langle \vec{p}' N_j' \mid e\tilde{\varphi}(x) \mid \vec{p} N_j \rangle —$$

матричный элемент перехода.

В случае А (§ 1) матричный элемент имеет вид

$$\langle \vec{p}' N_j' \mid e\tilde{\varphi}(x) \mid \vec{p} N_j \rangle = \frac{ze^2}{V} \int \frac{d\vec{x}}{x} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x} - \varkappa x} \langle N_j' \mid e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}_0 \omega_0 t} \mid N_j \rangle.$$

Разлагая его в ряд по амплитуде колебаний, получаем

$$\langle \vec{p}' N_j' \mid e\tilde{\varphi}(\vec{x}) \mid \vec{p} N_j \rangle = \frac{ze^2}{V} \int \frac{d\vec{x}}{x} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x} - \varkappa x} [\langle N_j' \mid I \mid N_j \rangle +$$

$$+ \langle N_j' \mid i(\vec{p} - \vec{p}') \vec{x}_0 \cos \omega_0 t \mid N_j \rangle].$$

Пользуясь (15), имеем

$$\langle \vec{p}' N_j' \mid e\tilde{\varphi}(x) \mid \vec{p} N_j \rangle = \frac{4\pi ze^2}{V[(\vec{p} - \vec{p}')^2 + \varkappa^2]} \Bigg[\delta(N_j', N_j) +$$

$$+ i \sqrt{\frac{\hbar}{2M_I \omega_0}} \sum_j \vec{e}_j (\vec{p} - \vec{p}') \{ \sqrt{N_j}\, \delta(N_j', N_j - 1) + \sqrt{N_j + 1} \times$$

$$\times \delta(N_j', N_j + 1) \} \Bigg].$$

В силу аддитивности вероятностей перехода можно написать

$$W(\vec{p}, \vec{p}') = W^0(\vec{p}, \vec{p}') + W(\vec{p}, \vec{p}')^+ + W(\vec{p}, \vec{p}')^-,$$

где первый член соответствует упругому рассеянию, второй и третий — неупругому:

$$W^0(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V^2} \frac{[4\pi ze^2]^2}{[|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \delta(E_{p'} - E_p),$$

$$W^+(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V^2} \frac{(4\pi ze^2)^2}{[|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \times$$

$$\times \sum_j \frac{\hbar N_j ((\vec{p} - \vec{p}') \vec{e}_j)^2}{2 M_I \omega_0} \delta(E_{p'} - E_p - \hbar \omega_0),$$

$$\overline{W}(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{V^2} \frac{(4\pi ze^2)^2}{[|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \times$$

$$\times \sum \frac{\hbar (N_j + 1) ((\vec{p} - \vec{p}') \vec{e}_j)^2}{2M_I \omega_0} \times \delta(E_{p'} - E_p + \hbar \omega_0).$$

В предположении, что ω_0 не зависит от вектора поляризации, величина $N_j = N_0 = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}$ также не зависит от направления поляризации.

Замечая далее, что

$$\sum_j ((\vec{p} - \vec{p}') \vec{e}_j)^2 = (\vec{p} - \vec{p}')^2,$$

имеем

$$W(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(4\pi z e^2)^2}{V^2 [\,|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \Big[\delta(E_{p'} - E_p) +$$

$$+ \frac{\hbar (\vec{p} - \vec{p}')^2}{2M_I \omega_0} \{N_0 \delta(E_{p'} - E_p - \hbar\omega_0) + (N_0 + 1)\, \delta(E_{p'} - E_p + \hbar\omega_0)\} \Big]. \quad (17)$$

Следовательно,

$$W(\vec{p}', \vec{p}) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{(4\pi z e^2)^2}{[\,|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \Big[\delta(E_{p'} - E_p) +$$

$$+ \frac{\hbar (\vec{p} - \vec{p}')^2}{2M_I \omega_0} \{N_0\, \delta(E_{p'} - E_p + \hbar\omega_0) + (N_0 + 1) + \delta(E_{p'} - E_p - \hbar\omega_0)\} \Big]. \quad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (16), получаем

$$\left(\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{2\pi n_I (4\pi z e^2)^2}{\hbar (2\pi)^3} \int d\vec{p}' \Big[\frac{f(\vec{p}') - f(\vec{p})}{[\,|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \delta(E_{p'} - E_p) +$$

$$+ \frac{\hbar (\vec{p} - \vec{p}')^2\, \delta(E_{p'} - E_p + \hbar\omega_0)}{2M_I \omega_0 [\,|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]} \{N_0 f(\vec{p}') - (N_0 + 1) f(\vec{p})\} +$$

$$+ \frac{\hbar (\vec{p} - \vec{p}')^2\, \delta(E_p - E_{p'} - \hbar\omega_0)}{2M_I \omega_0 [\,|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \varkappa^2]^2} \{(N_0 + 1) f(\vec{p}') - N_0 f(\vec{p})\} \Big]. \quad (19)$$

Положим

$$f = f_s(E_{\vec{p}}) + f_a(\vec{p}) \quad f_s \gg f_a,$$

где $f_s(E_{\vec{p}})$ — симметричная функция распределения, $f_a(\vec{p})$—антисимметричная функция распределения.

Для $f_a(\vec{p})$ в силу (19) получается хорошо известное [5] соотношение

$$\left(\frac{\partial f_a(\vec{p})}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{f_a(\vec{p})}{\tau_I} = -\frac{2\pi n_I (ze^2)^2 m}{\hbar^3 p^3} \left\{ \ln(1 + \xi) - \frac{\xi}{1 + \xi} \right\} f_a(\vec{p}). \quad (20)$$

Здесь

$$\xi = \frac{4p^2}{\varkappa^2}; \quad \tau_I = \frac{\hbar^3 p^3}{2\pi n_I (ze^2)^2 m G(\xi)};$$

$G(\xi) = \ln(1 + \xi) - \dfrac{\xi}{1 + \xi}$ — медленно меняющаяся функция.

Для $f_s(E_{\vec{p}})$ получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{4n_I (ze^2)^2\, 4\pi m \hbar}{2\hbar^3 M_I \omega_0} [\{(N_0 + 1) f_s(E_{\vec{p}} + \hbar\omega_0) - N_0 f_s(E_{\vec{p}})\} J_1 +$$

$$+ \{N_0 f_s(E_{\vec{p}} - \hbar\omega_0) - (N_0 + 1) f_s(E_{\vec{p}})\} J_2]. \quad (21)$$

Здесь

$$J_1 = -\frac{1}{4p}\left\{\frac{4p\varkappa^2\sqrt{p^2+\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}}}{\left(2p^2+\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}+\varkappa^2\right)-}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{2p^2+\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}+\varkappa^2-2p\sqrt{p^2+\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}}}{-4p^2-\dfrac{8m\omega_0\,p^2}{\hbar}}\right\},$$

$$J_2 = -\frac{1}{4p}\left\{\frac{4p\varkappa^2\sqrt{\dfrac{p^2-2m\omega_0}{\hbar}}}{\left(2p^2+\varkappa^2-\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}\right)^2-4p^2+\dfrac{8p^2\,m\omega_2}{\hbar}}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{2p^2+\varkappa^2-\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}-2p\sqrt{p^2-\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}}}{2p^2+\varkappa^2-\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}+2p\sqrt{p^2-\dfrac{2m\omega_0}{\hbar}}}\right\}.$$

Для дальнейшего упрощения оператора столкновений допустим, что энергия локального фонона удовлетворяет неравенству

$$\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} \ll \hbar\omega_0 \ll \overline{W}, \tag{22}$$

$\overline{W}$ — средняя энергия электрона.

В силу (11) можно разложить $f_s(E_{\vec{p}} \pm \hbar\omega_0)$ в ряд Тейлора:

$$f_s(E_{\vec{p}} \pm \hbar\,\omega_0) = f_s(E_{\vec{p}}) \pm \hbar\,\omega_0 f'_s(E_{\vec{p}}) + \frac{(\hbar\,\omega_0)^2}{2} f''_s(E_{\vec{q}}), \tag{23}$$

опустим слагаемые, содержащие $\hbar\omega_0$ в степени выше второй. Аналогично разложим и J_1, J_2 и N_0 по малому параметру $\hbar\omega_0/W$,

$$J_1 = -\frac{1}{4p}\left[\frac{\left(1+\dfrac{m\omega_0}{\hbar p^2}\right)}{\left(1+\dfrac{m^2\omega^2}{\hbar^2 p^2\varkappa^2}\right)}\left\{1-\frac{m\omega_0}{\hbar p^2\left(1+\dfrac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2 p^2\varkappa^2}\right)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\ln\left(\frac{m^2\omega_0}{\hbar^2p^2}+\varkappa^2\right)+\frac{m^3\,\omega_0^3}{\hbar^3p^4\left(\varkappa^2+\dfrac{m^2\,\omega_0^2}{\hbar^2p^2}\right)}-\ln 4p^2+\frac{m\omega_0}{\hbar p^2}\right], \tag{24}$$

$$J_2 = -\frac{1}{4p}\left[\frac{\left(1-\dfrac{m\omega_0}{\hbar p^2}\right)}{\left(1+\dfrac{m^2\,\omega^2}{\hbar^2p^2\,\varkappa^2}\right)}\left\{1+\frac{m\omega_0}{\hbar p^2\left(1+\dfrac{m^2\,\omega^2}{\hbar^2p^2\,\varkappa^2}\right)}\right\}\right., \tag{25}$$

$$N_0 = \frac{kT}{\hbar\omega_0}-\frac{1}{2}. \tag{26}$$

Подставляя (23), (25), (24) и (26) в (21), находим

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{2\pi m n_I (ze^2)^2}{\hbar M_I KTP}\left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{a^2}{x^2(1+a/x)^2}\right)\left(f_s+\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\left\{\ln x+\ln\left(\frac{8mKT}{\hbar^2\varkappa^2}\right)-\ln(1+a/x)-\frac{x}{x+a}\right\}\left\{\frac{\partial f_s}{\partial x}+\frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2}\right\}\right]. \qquad (27)$$

Здесь $a=\dfrac{m\omega_0^2}{2KT\varkappa^2}=\dfrac{\omega_0^2}{2\omega_p^2}\sim 1$; $x=\dfrac{E_{\vec{p}}}{KT}$ — безразмерная переменная.

Уравнение (3.20) удобно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{2\pi n_I m (ze^2)^2}{KT\cdot\hbar p M_I}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\ln x+\ln\left(\frac{8mKT}{\hbar^2\varkappa^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ln(1+a/x)-\frac{x}{x+a}\right)\left(f_s+\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)\right\}.$$

Заметим, что при $\hbar\omega_0\leqslant\dfrac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}$, т. е. при $a\ll 1$, интеграл столкновений не зависит от частоты колебаний центра. В случае Б (§ 1) мы имеем

$$\langle\vec{p}'N_0'\,|\,e\widetilde{\varphi}(x)\,|\,\vec{p}N_0\rangle = \frac{4\pi ze^2\,\delta(N_0';N_0)}{V\left[|\vec{p}-\vec{p}'|^2+\varkappa^2\right]}+$$

$$+\frac{ize^2}{V}\sqrt{\hbar/2M_I\omega_0}\sum_j\frac{4\pi\,\vec{e}_j\cdot(\vec{p}-\vec{p}')}{(\vec{p}-\vec{p}')^2\,(1-\omega_p^2/\omega_0^2)}\times$$

$$\times\{\sqrt{N_0}\,\delta(N_0';N_0-1)+\sqrt{N_0+1}\,\delta(N_0';N_0+1)\}.$$

Соответственно

$$W(\vec{p},\vec{p}') = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{(4\pi ze^2)^2}{V^2}\left[\frac{\delta(E_{p'}-E_p)}{[|\vec{p}-\vec{p}'|^2+\varkappa^2]^2}+\right.$$

$$+\frac{\hbar}{2M_I\omega_0(\vec{p}-\vec{p}')^2\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\right)}\{N_0\delta(E_{p'}-E_p-\hbar\omega_0)+(N_0+1)\times$$

$$\left.\times\,\delta(E_{p'}-E_p+\hbar\omega_0)\}\right]. \qquad (28)$$

Как видно из (28), $\left(\dfrac{\partial f_a}{\partial t}\right)_{\text{ст}}$ дается той же формулой (20), а для $\left(\dfrac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}}$ получается

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{16 n_I (ze^2)^2\,\hbar\cdot m\pi}{2M_I\omega_0\hbar^3(1-\omega_p^2/\omega_0^2)^2}\left[\{(N_0+1)f_s(E_{\vec{p}}+\hbar\omega_0)-N_0 f_s(E_{\vec{p}})\}J_1+\right.$$

$$\left.+J_2\{N_0 f_s(E_{\vec{p}}-\hbar\omega_0)-(N_0+1)f_s(E_{\vec{p}})\}\right], \qquad (29)$$

где

$$J_1=-\frac{1}{2p}\left[\ln\left(\frac{m\omega_0}{2\hbar p^2}\right)-\frac{m\omega_0}{\hbar p^2}+\frac{3}{4}\frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2 p^4}\right], \qquad (30)$$

$$J_2 = -\frac{1}{2p}\left[\ln\left(\frac{m\omega_0}{2\hbar p^2}\right) + \frac{m\omega_0}{\hbar p^2} + \frac{3}{4}\frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2 p^4}\right]. \tag{31}$$

Разлагая $f_s(E_{\vec{p}} \pm \hbar\omega_0)$ в ряд Тэйлора и подставляя (30) и (31) в (29), находим

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{4\pi n_I (ze^2)^2 m}{M_I (1-\omega_p^2/\omega_0^2)^2 \hbar p KT}\left[\frac{f_s}{x} + \ln\left(\frac{4KT_x}{\hbar\omega_0}\right)\frac{\partial f_s}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{x_0(e^{x_0}+1)}{(e^{x_0}-1)}\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial f_s}{\partial x} + \ln\left(\frac{4KT_x}{\hbar\omega_0}\right)\frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2}\right]\right.,$$

где $x_0 = \hbar\omega_0/KT$.

Это выражение удобно представить в виде

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{4\pi n_I (ze^2)^2 m}{M_I (1-\omega_p^2/\omega_0^2)^2 \hbar pKT} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{\ln\left(\frac{4KTx}{\hbar\omega_0}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(f_s + \frac{x_0}{2}\frac{(e^{x_0}+1)}{(e^{x_0}-1)}\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)\right\}.$$

Заметим, что в данном случае условие $\hbar\omega_0 < KT$ не обязательно.

В заключение выражаю глубокую признательность В. Л. Бонч-Бруевичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статической механике, 1961.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Справочник по математике, 1963.
3. Koshino S. «Progr. theor. Phys.», **24**, 484, 1960.
4. Maradudin A. A. Theoretical and experemental aspects of the effects of point defects and disorder on the vibrations of crystals. N. Y., 1966.
5. Brooks H. «Phys. Rev.», **83**, 879(A), 1951.

Поступила в редакцию
13.10 1972 г.

Кафедра
полупроводников