Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1973

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

НЕГОЛОНОМНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СТОКСА

При отыскании интегральных величин в общей теории относительности интегрируют обычно по гиперповерхностям. В предлагаемой заметке формула Стокса записана для того случая, когда областью интегрирования является не поверхность с касательными площадками, а квазиповерхность, т. е. в каждой точке поверхности взята плоскость, ее, вообще говоря, не касающаяся. Для случая интегрирования по физическому пространству это означает переход от пространств без вращения (трехмерное слоение с касательными гиперплоскостями) к пространствам с вращением (трехмерное неинтегрируемое распределение).

Квазиповерхность $M_k^{n,m}$ представляет собой ограничение распределения

$$M_k^n : x \mapsto E_x^k \in T_x M^n, \quad x \in M^n$$

по базе на подмногообразие $M^m \subset M^n$.

Теорема Стокса имеет вид

$$\int\limits_{\partial C} \omega = \int\limits_{C} d\omega .$$

Здесь c — любая $(k+1)$-цепь на M, ω — любая k-форма на M, ∂C — k-цепь, являющаяся границей C. Каждый кусок цепи ∂C заменим квазиповерхностью $M_k^{n,k}$ и обозначим полученную квазицепь $\partial' C$. Тогда для того чтобы найти интеграл $\int \omega$, достаточно отыскать форму θ, принимающую на касательной к ∂C площадке η то же значение, что и форма ω на площадке $\xi \in \partial' C : \theta(\eta) = \omega(\xi)$. Если A — аффинор, поворачивающий площадку η до совмещения с ξ $(\xi = A\eta)$, то в силу линейности A имеем $\theta = \omega A$.

Таким образом:

$$\int\limits_{\partial' C} \omega = \int\limits_{\partial C} \omega A = \int\limits_{C} d(\omega A) .$$

Пусть ξ и η заданы в некоторой системе координат простыми k-векторами $\underset{1}{a}^{[\alpha_1} \dots \underset{k}{a}^{\alpha_k]}$, $\underset{1}{b}^{[\beta_1} \dots \underset{k}{b}^{\beta_k]}$ $(\alpha_k, \beta_k = 1, \dots, n)$, и пусть $\underset{i}{b}^{\beta_i} = \underset{i}{A}{}^{\beta_i}_{\alpha_i} \underset{i}{a}^{\alpha_i}$ $(i = 1, \dots, k)$. Тогда для аффинора A имеем

$$A = \underset{1}{A}{}^{[\beta_1}_{\alpha_1} \dots \underset{k}{A}{}^{\beta_k]}_{\alpha_k} .$$

Многомерным аналогом потока без источников являются замкнутые формы $(d\omega = 0)$. Переход от границы к квазигранице эквивалентен, таким образом, возникновению эффективного источника. При интегрировании уравнений Максвелла это соответствует возникновению, в частности, эффективного магнитного заряда (А. Л. Зельманов, частное сообщение). В трехмерном представлении уравнений Максвелла удобно использовать в этом интегрировании хронометрические инварианты Зельманова [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
2. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию 20.8 1971 г.

Кафедра астрофизики

УДК 539.12.01

А. Д. СМИРНОВ

К ПОСТРОЕНИЮ $SU\,(2) \otimes L\uparrow$-ИНВАРИАНТНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СПИНОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Как известно, нелинейная спинорная теория Гейзенберга — Иваненко основывается на нелинейном обобщении уравнения Дирака [1, 2] вида:

$$i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi + l^2 \sum_{n} c_n (\overline{\Psi}\Gamma_n\Psi)\,\Gamma_n\Psi = 0, \tag{1}$$

где Ψ — фундаментальное спинорное поле, l — произвольный параметр размерности длины, Γ_n — 5 известных наборов ковариантных дираковских матриц, c_n — произвольные вещественные числа. Являясь перспективной основой для описания элементарных частиц, уравнение (1) позволяет получить целый ряд физических следствий: массы и магнитные моменты мезонов, магнитные моменты барионов, константы связи и др. [3, 4].

Однако при нелинейном обобщении уравнения Дирака, как известно, имеет место определенный произвол в выборе вида нелинейных членов самодействия, для устранения которого помимо требований симметрии приходится использовать ряд дополнительных соображений (минимальная нелинейность уравнения, простота и т. п.).

С другой стороны, в последнее время для описания нарушенных симметрий, таких, как киральная, унитарная, конформная, весьма успешное применение получил метод нелинейных представлений групп, который естественным образом приводит также к нелинейным уравнениям поля, причем получаемые при этом уравнения нелинейны относительно скалярных (мезонных) полей [5—7].

В данной работе на примере группы $SU(2)$ исследуется применимость этого метода для установления вида нелинейных членов самодействия в спинорном уравнении. Для этого введены нелинейные представления группы $SU(2)$ в пространстве спиноров ортохронной группы Лоренца $L\uparrow$ и найдены два существенно нелинейных представления группы $SU(2)$ в двумерном внутреннем пространстве спиноров группы $L\uparrow$. Затем, используя найденные нелинейные представления группы $SU(2)$ в терминах ковариантной производной спинорного поля получены соответствующие им нелинейные спинорные уравнения и тем самым доказана принципиальная применимость метода нелинейных представлений групп для установления вида нелинейных членов самодействия в спинорном уравнении. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

Пусть фундаментальное поле Ψ есть созокупность двух дираковых спиноров $\Psi_{a\alpha}$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $a = 1, 2$. Наряду с обычными лоренцевыми преобразованиями

$$\Psi_{a\alpha}(x) \to \Psi'_{a\alpha}(x') = T_{\alpha\beta}(\lambda)\,\Psi_{a\beta}(x), \ \lambda \in L\uparrow, \tag{2}$$

рассмотрим нелинейные преобразования поля Ψ, коммутирующие с (2) и образующие группу $SU(2)$, вида [8, 9]:

$$\Psi_{a\alpha}(x) \to \widetilde{\Psi}_{a\alpha}(x) = \Psi_{a\alpha}(x) + \delta t_{\mu} T^{(\mu)}_{ab}(f)\,\Psi_{b\alpha}(x), \tag{3}$$

где $T^{(\mu)}(f)$ — генераторы группы $SU\,(2)$, зависящие от f_{ρ}; f_{ρ} — инвариантны преобразования (2), для простоты выберем $f_{\rho} = \overline{\Psi}_{a\alpha}\tau^{(\rho)}_{ab}\Psi_{b\alpha}$; $\rho = 0, 1, 2, 3$; $\tau^{(0)} = I$, $\tau^{(i)}$ — матрицы Паули.