Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1973

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ, А. А. ПЛАТОНОВ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Для случая нелинейной проводимости, создаваемой диффундирующими ионами с нелинейным трением, исследованы флуктуации стороннего электрического тока в рамках кубической флуктуационно-диссипационной термодинамики.

В последнее время проведено исследование [1, 2] тепловых электрических флуктуаций в нелинейно проводящих средах на основе нелинейной флуктуационно-диссипационной термодинамики в неквантовом марковском варианте [3]. Согласно этой теории при использовании четырехиндексных соотношений (приближение кубической нелинейности) диссипационные характеристики процесса, т. е. вид основного (релаксационного) уравнения и нелинейной вольт-амперной характеристики, не могут полностью определить все четырехиндексные флуктуационные характеристики процесса. Остается еще некоторое количество «диссипационно-неопределяемых параметров»; этим кубические (и более высокие) приближения отличаются от линейного и квадратичного приближения. Из [1] видно, что в случае системы с одной степенью свободы (простой контур) имеется один диссипационно-неопределяемый параметр, а в [2] показано, что в случае однородной изотропной среды имеется два таких параметра.

Чтобы вычислить диссипационно-неопределяемые параметры, приходится выходить за рамки развитой в [3] термодинамики, прибегать к каким-то динамическим модельным соображениям.

Отсюда понятна важность исследования моделей нелинейной проводимости. В настоящей работе будет исследована одна простая модель. Будем предполагать, что электрический ток представляет собой поток ионов — заряженных броуновских частиц (с малым, но конечным времени релаксации по скорости), движущихся в условиях нелинейного трения. Для этой модели будут проверены найденные в [2] соотношения и вычислены диссипационно-неопределяемые параметры.

Движение каждой броуновской частицы согласно формуле (29) из [4] описывается уравнением

$$M\dot{v}_\sigma = M(a + bv^2)\,v_\sigma + eE_\sigma + \xi_\sigma(t). \tag{1}$$

Здесь a, b — коэффициенты, связанные с линейным и нелинейным трением, ξ_σ — дельтакоррелированные внешние силы, которые вследствие (32) — (39) из [4] имеют кумулянты

$$K[\xi_\sigma(t_1), \xi_\rho(t_2)] = M^2\left[\left(-\frac{2T}{M}a + dv^2\right)\delta_{\sigma\rho} + ev_\rho v_\sigma\right]\delta(t_1 - t_2); \quad (2)$$

$$K[\xi_\sigma(t_1), \xi_\rho(t_2), \xi_\pi(t_3)] = -\frac{M^4 g}{2T}(\delta_{\sigma\rho}v_\pi + \delta_{\sigma\pi}v_\rho + \delta_{\pi\rho}v_\sigma)\,\delta(t_1, t_2, t_3); \quad (3)$$

$$K[\xi_\sigma(t_1), \xi_\rho(t_2), \xi_\pi(t_3), \xi_\tau(t_4)] = M^4 g(\delta_{\sigma\rho}\delta_{\pi\tau} + \delta_{\sigma\tau}\delta_{\pi\rho} + \delta_{\sigma\pi}\delta_{\rho\tau})\,\delta(t_1, t_2, t_3, t_4), \quad (4)$$

где

$$g = 8\left(\frac{T}{M}\right)^3 b + 4\left(\frac{T}{M}\right)^2(d + e);\ \delta(t_1, \ldots, t_n) = \delta(t_1 - t_2)\ldots\delta(t_1 - t_n). \quad (5)$$

В (1) в качестве внешней силы $\vec{F}$ взята электрическая сила $e_0\vec{E}$ со стороны электрического поля (e_0 — заряд иона).

Ионы создают плотность электрического тока

$$j_\alpha + j_\alpha^\Phi = e_0\sum_k v_\alpha^k\delta(\vec{x} - \vec{x}_k). \quad (6)$$

Здесь индекс k обозначает номер частицы. Через j_α мы обозначаем средний ток

$$j_\alpha = e_0\overline{\sum_k v_\alpha^k\delta(\vec{x} - \vec{x}_k)} = \overline{e\overline{v_\alpha(E)}\sum_k\delta(\vec{x} - \vec{x}_k)} = e_0 N_0\overline{v_\alpha(E)}, \quad (7)$$

где N_0 — число ионов в единице объема. Функцию $\overline{v_\alpha(E)}$ вычисляем при помощи (1) — (4). Используя малость параметра b, находим решение уравнения (1) последовательными приближениями. Первое приближение, получаемое отбрасыванием в (1) нелинейного члена bv^2, имеет вид

$$v_\alpha^{(1)}(t_1) = \int G(t - t')[e_0E_\alpha + \xi(t')]\,dt' = G(e_0E_\alpha + \xi_\alpha), \quad (8)$$

$$\left(G = \|G(t - t')\| = M^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\right)^{-1}\right).$$

Во втором приближении имеем

$$v_\alpha^{(2)}(t) = G(e_0E_\alpha + \xi_\alpha + Mb[v^{(1)}]^2). \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9), усредняя и пренебрегая флуктуационными поправками (предполагаем, что $\overline{(G\xi_\alpha)^2} \ll \overline{v_\alpha^2}$), получаем во втором приближении

$$v_\alpha(E) = -\frac{e_0}{Ma}E_\alpha - \frac{be_0^3}{M^3a^4}E^2E_\alpha + b^2\ldots \quad (10)$$

Этот результат можно получить сразу из (1), считая $\dot{v}_\alpha = 0$ и пренебрегая ξ_α. Подставляя (10) в (7), получаем формулу

$$j_\alpha = -\frac{e^2N_0}{Ma}E_\alpha - \frac{be_0^4N_0}{M^3a^4}E^2E_\alpha + \ldots, \quad (11)$$

служащую конкретизацией равенства (2.3) из [2].

При этом сопоставление дает:

$$\sigma_{\alpha,\beta} = -\frac{e^2 N_0}{Ma}\delta_{\alpha\beta};\ \sigma_{\alpha,\beta\gamma\rho} = -\frac{2e_0^4 N_0 b}{M^3 a^4}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\beta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho}). \quad (12)$$

Перейдем к исследованию флуктуационного тока j_α^Φ. Точки $\vec{x}_k$ будем предполагать пуассоновскими и пренебрегать их смещениями на протяжении времени корреляции $\tau_{\text{кор}}$ скорости $\vec{v}$.

Известно [5], что кумулянты функции $\zeta(\vec{x}) = \sum_k \delta(\vec{x} - \vec{x}_k)$ для пуассоновских точек определяются простой формулой

$$K[\zeta(\vec{x}_1), \ldots, \zeta(\vec{x}_n)] = N_0 \lambda\, \delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n).$$

Так же просто отыскиваются (если точки неподвижны) и кумулянты суммы (6)

$$K[j_{\alpha_1}(x_1,\ t_1), \ldots, j_{\alpha_n}(x_n t_n)] = e_0^n N_0 M[v_{\alpha_1}(t_1) \ldots v_{\alpha_n}(t_n)]\, \delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n). \quad (13)$$

Предполагаем, что флуктуационные смещения точек $\vec{x}_k$ пренебрежимо малы лишь в течение времен порядка $\tau_{\text{кор}}$. При интервалах $t_i - t_j \gg \tau_{\text{кор}}$ дельта-функция $\delta(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ расплывается вследствие указанных смещений. Учтем это заменой формулы (13) на формулу

$$K[j_{\alpha_1}^\Phi(\vec{x}_1, t_1), \ldots, j_{\alpha_n}^\varphi(\vec{x}_n, t_n)] = e_0^n N_0 K[v_{\alpha_1}(t_1), \ldots, v_{\alpha_n}(t_n)]\, \delta(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n). \quad (14)$$

В марковской теории [1, 3] флуктуации тока являются дельта коррелированными во времени. Это соответствует случаю относительно малых времен корреляции $\tau_{\text{кор}} \sim a^{-1}$ скорости, при этом (11) можно заменить на равенство

$$K[j_{\alpha_1}^\Phi(\vec{x}_1, t_1), \ldots, j_{\alpha_n}^\Phi(\vec{x}_n, t_n)] = e_0^n N_0 \int \ldots \int K[v_{\alpha_1}(t_1), \ldots$$
$$\ldots, v_{\alpha_n}(t_n)]\, dt_2 \ldots dt_n\, \delta(x_1, \ldots, x_n)\, \delta(t_1, \ldots, t_n). \quad (15)$$

Если положить $n=4$ и $E=0$, то из сравнения с формулой (4.2) из [1] запишем

$$T^3 \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_4} = e_0^4 N_0 \iint K[v_{\alpha_1}(t_1), \ldots, v_{\alpha_4}(t_4)]_{E=0}\, dt_2 dt_3 dt_4. \quad (16)$$

При вычислении матриц $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \mu_{\alpha_1}, \ldots, \nu_{\alpha_1}, \ldots$ четырехиндексной теории следует учитывать лишь члены первого порядка по b, g, d, e, поскольку согласно (12) матрица $\sigma_{\alpha_1}, \ldots$ (линейно связанная с $\lambda_{\alpha_1} \ldots, \mu_{\alpha_1} \ldots, \nu_{\alpha_1} \ldots$) пропорциональна g.

Более высокими порядками малости можно пренебрегать. Кумулянт (4) уже пропорционален g. Следовательно, при вычислении правой части (16) при помощи (4) нужно учитывать лишь нулевой порядок по b, т. е. можно считать связь $\vec{v}$ с $\vec{\xi}$ линейной в соответствии с формулой (8).

Полагая $E=0$ в (8), таким путем легко получить

$$T^3 \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_4} = \left(\frac{e_0}{Ma}\right)^4 N_0 \int \ldots \int K[\xi_{\alpha_1}(t_1), \ldots, \xi_{\alpha_4}(t_4)]\, dt_2 dt_3 dt_4 =$$

$$= \frac{e_0^4 N_0}{a^4} g (\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4} + \delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} + \delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3}). \qquad (17)$$

Аналогичным образом, учитывая относительную малость флуктуационного разброса σ_v (большая масса M), можно при вычислении

$$\iint K[v_{\alpha_1}(t_1), \ldots, v_{\alpha_3}(t_3)]\, dt_2 dt_3 \text{ и } \int K[v_{\alpha_1}(t_1), v_{\alpha_2}(t_2)]\, dt_2$$

пользоваться линейной формулой (8) связи $\vec{v}$ и $\vec{\xi}$, полагая в ней $E = 0$. Поэтому в силу (2), (3) получим

$$Q_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \iint K[v_{\alpha_1}(t_1), v_{\alpha_2}(t_2), v_{\alpha_3}(t)]\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{Mg}{2Ta^3} [\delta_{\alpha_1\alpha_2}\overline{v_{\alpha_3}(E)} + \delta_{\alpha_2\alpha_3}\overline{v_{\alpha_1}(E)} + \delta_{\alpha_1\alpha_3}\overline{v_{\alpha_2}(E)}]; \qquad (18)$$

$$Q_{\alpha_1\alpha_2} = \int K[v_{\alpha_1}(t_1), v_{\alpha_2}(t_2)]\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\left(-\frac{2T}{M}a + d\overline{v^2(E)}\right)\delta_{\alpha_1\alpha_2} + e\bar{v}_{\alpha_1}(E)\, v_{\alpha_2}(\bar{E})\right].$$

Эти выражения следует подставить в формулы

$$K[j^{\Phi}_{\alpha_1}(\vec{x}_1\, t_1), \ldots, j^{\Phi}_{\alpha_3}(\vec{x}_3, t_3)] = e_0^3 N_0 Q_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}\delta(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)\,\delta(t_1, t_2, t_3);$$

$$K[j^{\Phi}_{\alpha_1}(\vec{x}_1, t_1), j^{\Phi}_{\alpha_2}(\vec{x}_2, t_2)] = e_0^2 N_0 Q_{\alpha_1\alpha_2}\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,\delta(t_1 - t_2),$$

справедливые вследствие (15).

Частные производные по E_α согласно (4.5), (4.6) из [2] обозначаются так:

$$-T^2\mu_{\alpha_1\ldots,\alpha_4} = e_0^3 N_0 \frac{\partial Q_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}{\partial E_{\alpha_4}}; \quad T\nu_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = e_0^2 N_0 \frac{\partial^2 Q_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial E_{\alpha_3}\partial E_{\alpha_4}}.$$

при $E = 0$

Подставляя сюда (18) и производя дифференцирование, достаточно учесть лишь линейные члены $-\frac{e_0}{Ma}E_\alpha$ зависимости (10). Это дает

$$T^2_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_4} = \frac{e_0^4 N_0 g}{2Ta^4}(\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4} + \delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} + \delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3}); \qquad (19)$$

$$T\nu_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = \frac{e_0^4 N_0}{M^2 a^4}[2d\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4} + e(\delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} + \delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3})]. \qquad (20)$$

Сопоставляя (17) и (19), убеждаемся, что термодинамическое соотношение $\mu_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_4} = -\frac{1}{2}\lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_4}$ (см. (4.7) из [2]) выполняется. Далее легко видеть, что соотношение (4.8) из [2] для значений (12), (17), (20) также выполняется в силу (5), см. (39) из [4].

Вид полученных результатов (12), (17), (19), (20), очевидно, соответствует изотропному случаю (см. (4.9)—(4.12) из [2]). При этом определенные в [2] параметры имеют вид:

$$\sigma = -\frac{e_0^2 N_0}{Ma}; \ s = -\frac{2e_0^4 N_0 b}{M^3 a^4}; \ \lambda = -2\mu = \frac{e_0^4 N_0 g}{a^4 T^3};$$

$$\nu_1 = \frac{2e_0^4 N_0 d}{M^2 a^4 T}, \ \nu_2 = \frac{e_0^4 N_0 e}{M^2 a^4 T}.$$

Тем самым электрические параметры выражены через параметры броуновской частицы (иона).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. «Изв. вузов», радиофизика, **13**, 1512, 1970.
2. Стратонович Р. Л., Платонов А. А. «Радиотехника и электроника», **18**, № 2, 1973.
3. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 5, 479, № 6, 699, 1970.
4. Стратонович Р. Л., Платонов А. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **13**, № 6, 1972.
5. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиофизике М., «Советское радио», 1961.

Поступила в редакцию
2.11 1971 г.

Кафедра
общей физики для мехмата