Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1973

УДК 538.3 : 530.145

Ю. М. ЛОСКУТОВ, В. В. СКОБЕЛЕВ

О ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. КОМПТОН-ЭФФЕКТ

Найдено еще одно представление функции Грина уравнения Дирака для электрона в постоянном однородном магнитном поле. В интегральной форме получено точное по полю и частоте фотона дифференциальное сечение рассеяния фотона на электроне в магнитном поле. Рассмотрены частные случаи.

Задача о функции Грина уравнения Дирака для электрона в постоянном однородном магнитном поле имеет большое практическое значение в связи с исследованиями процессов, фейнмановские диаграммы которых содержат внутренние электронные линии. Использование полученной в [1] функции Грина уравнения Дирака для электрона во внешнем произвольном постоянном электромагнитном поле, а также в [2] — в постоянном однородном магнитном поле, в ряде практических приложений приводит к громоздким и трудоемким вычислениям, хотя в некоторых задачах их применение оказывается весьма эффективным. Мы предлагаем еще один вид функции Грина $S(x, y)$, который также может быть полезным в ряде приложений.

Решение уравнения

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t} - (\vec{\alpha}\vec{P}) - \rho_3 m\right\} S(x, y) = -i\delta(x-y), \tag{1}$$

которому подчиняется $S(x, y)$, будем искать в виде

$$S(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 m\right\}\int (d\tilde{k})_{0,2,3}\,\Phi(\bar{k}, x_1, y_1)\, e^{i[\tilde{k}(x-y)]_{0,2,3}}, \tag{2}$$

где $(d\tilde{k})_{0,2,3} \equiv d\tilde{k}_0 d\tilde{k}_2 d\tilde{k}_3$ и использованы принятые обозначения. Подставляя (2) в (1), для функции Φ получаем уравнение

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - P^2 - \gamma\sigma_3 - m^2\right\}\Phi e^{i[\tilde{k}(x-y)]_{0,2,3}} = \delta(x_1 - y_1)\, e^{i[\tilde{k}(x-y)]_{0,2,3}}, \tag{3}$$

где $\gamma = e_0 H$. Выбирая $A_0 = A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = x_1 H$ и замечая, что функция Φ может быть представлена диагональной четырехрядной матрицей с компонентами Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, после замены переменной

$$x_1' = \sqrt{2}\left(x_1\sqrt{\gamma} + \frac{\widetilde{k}_2}{\sqrt{\gamma}}\right), \tag{4}$$

получаем уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx_1'^2} - \frac{x_1'^2}{4} + p - \frac{1}{2}\right)\Phi_{1,3} = (2\gamma)^{-1/2}\,\delta\,x_1' - y_1'), \tag{5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1'^2} - \frac{x_1'^2}{4} + p + \frac{1}{2}\right)\Phi_{2,4} = (2\gamma)^{-1/2}\,\delta\,(x_1' - y_1'). \tag{6}$$

Здесь $p = (\widetilde{k}_0^2 - \widetilde{k}_3^2 - m^2)/2\gamma$. Решениями уравнений (5), (6) без правой части являются функции параболического цилиндра $D_{p-1}(x_1')$ и $D_p(x_1')$ соответственно [3]. Используя в качестве второй пары решений функции $C_{p-1}D_{p-1}(-x_1')$ и $C_p D_p(-x_1')$ и определяя коэффициенты C_μ ($\mu = p$, $p-1$) из условия

$$C_\mu D_\mu(-x_1')\,D_\mu'(x_1') + C_\mu D_\mu'(-x_1')\,D_\mu(x_1') = 1,$$

решение неоднородного уравнения (6), например, можно представить [4] в виде

$$\Phi_{2,4} = -\frac{\Gamma(-p)}{2\sqrt{\gamma\pi}}\left\{D_p(x_1')\int\limits_{z_{2,4}^0}^{x_1'} D_p(-z)\,\delta(z - y_1')\,dz + \right.$$

$$\left. + D_p(-x_1')\int\limits_{x_1'}^{\widetilde{z}_{2,4}^0} D_p(z)\,\delta(z - y_1')\,dz\right\}. \tag{7}$$

Решение для $\Phi_{1,3}$ получается из (7) заменой p на $p-1$ и новым выбором постоянных интегрирования $z_{1,3}^0$ и $\widetilde{z}_{1,3}^0$. Полагая $z_{1,2,3,4}^0 = -\infty$, а $\widetilde{z}_{1,2,3,4}^0 = \infty$, находим функцию Грина

$$S(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^{7/2}\sqrt{2\gamma}}\left\{i\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 m\right\}\int (d\widetilde{k})_{0,2,3}\,Q e^{i[\widetilde{k}(x-y)]_{0,2,3}}, \tag{8}$$

где

$$Q_{1,3} = \Gamma(1-p)\{\theta(x_1' - y_1')\,D_{p-1}(x_1')\,D_{p-1}(-y_1') + \theta(y_1' - $$
$$- x_1')\,D_{p-1}(y_1')\,D_{p-1}(-x_1')\}, \tag{9}$$

$$Q_{2,4} = \Gamma(-p)\{\theta(x_1' - y_1')\,D_p(x_1')\,D_p(-y_1') + \theta(y_1' - x_1')\,D_p(y_1')\,D_p(-x_1')\}, \tag{10}$$

$y_1' = \sqrt{2}\left(y_1\sqrt{\gamma} + \dfrac{\widetilde{k}_2}{\sqrt{\gamma}}\right)$, а $\theta(x)$ — известная ступенчатая функция.

Определенным выбором пути интегрирования в плоскости комплексного переменного k_0 можно добиться того, чтобы $S(x, y)$ обладала свойствами причинной функции Грина.

Используя (8), рассмотрим комптон-эффект в однородном стационарном магнитном поле, хотя некоторые особенности комптоновского рассеяния при наличии внешних полей обсуждались ранее в [5—7]. В [5], например, получены общие формулы, описывающие рассеяние фотонов, начальный импульс которых направлен вдоль поля. В [6] рассматривается комптон-эффект в скрещенном поле (оба инварианта поля равны нулю), и интерполяция полученных результатов на случай чисто магнитного поля приводит к ограничениям на частоту фотона и величину поля. Наконец, в [7] подтверждаются некоторые частные выводы [5, 6]. Ниже будет получена общая формула для дифференциального сечения комптоновского рассеяния во втором приближении теории возмущений без каких-либо ограничений на импульс фотона и величину магнитного поля.

Матричный элемент, определяющий сечение комптоновского рассеяния, имеет вид

$$\langle 2 | S^{(2)} | 1 \rangle = e_0^2 \int \overline{\psi}^{(2)}(x) \{ \widehat{A}^{(2)*}(x) S(x, y) \widehat{A}^{(1)}(y) + \\ + \widehat{A}^{(1)}(x) S(x, y) \widehat{A}^{(2)*}(y) \} \psi^{(1)}(y) \, d^4x \, d^4y, \tag{11}$$

где потенциал поля фотонов

$$A_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa L^3}} \, e_\nu^{(1,2)} \exp[i(\varkappa x)], \tag{12}$$

а волновая функция электрона в декартовых координатах [8] представляется с помощью функций параболического цилиндра

$$\psi = \frac{e^{-iKt+ik_2x_2+ik_3x_3}}{\sqrt{L_2L_3}\sqrt{n!}} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} \begin{pmatrix} C_1 \sqrt{n} D_{n-1}(\xi) \\ iC_2 D_n(\xi) \\ C_3 \sqrt{n} D_{n-1}(\xi) \\ iC_4 D_n(\xi) \end{pmatrix}; \quad \xi = \sqrt{2}\left(x_1\sqrt{\gamma} + \frac{k_2}{\sqrt{\gamma}}\right),$$
$$\Sigma |C_i|^2 = 1. \tag{13}$$

Используя (8)—(13), получаем следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния (штрихованные величины относятся к конечному состоянию):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma d\varkappa'} = \frac{e_0^4}{(2\pi)^2} \cdot \frac{\varkappa'}{\varkappa} \left| \sum_{i=1}^{3} (M_i + \widetilde{M}_i) \right|^2 \delta(K + \varkappa - K' - \varkappa') \, \delta_{k_3+\varkappa_3,\, k_3'+\varkappa_3'}. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{M}_i$ связаны с M_i преобразованием

$$e_\nu^{*(2)} \rightleftarrows e_\nu^{(1)}, \quad \varkappa_\nu \rightleftarrows -\varkappa_\nu', \quad \varkappa \rightleftarrows -\varkappa', \tag{15}$$

а величины M_i имеют вид:

$$M_1 = \frac{\Gamma(1-p)}{\sqrt{2\gamma}} \{ -(C_4C_1'^{+} + C_2C_3'^{+}) [e_3^{(1)} e_3^{*(2)} F_-(n, p; n'-1, p-1) + \\ + (e_2^{(1)} + ie_1^{(1)})(e_2^{*(2)} + ie_1^{*(2)}) F_-(n, p-1; n'-1, p)] +$$

$$+ (C_3C_1'^+ + C_1C_3'^+)[(e_2^{(1)} - ie_1^{(1)})e_3^{*(2)}F_-(n-1,\ p;\ n'-1,\ p-1) -$$

$$- e_3^{(1)}(e_2^{*(2)} + ie_1^{*(2)})F_-(n-1,\ p-1;\ n'-1,\ p)] + (C_4C_2'^+ + C_2C_4'^+)[(e_2^{(1)} +$$

$$+ ie_1^{(1)})e_3^{*(2)}F_-(n,\ p-1;\ n',\ p) - e_3^{(1)}(e_2^{*(2)} - ie_1^{*(2)})F_-(n,\ p;\ n',\ p-1)] +$$

$$+ (C_3C_2'^+ + C_1C_4'^+)[e_3^{(1)}e_3^{*(2)}F_-(n-1,\ p-1;\ n',\ p) +$$

$$+ (e_2^{(1)} - ie_1^{(1)})(e_2^{*(2)} - ie_1^{*(2)})F_-(n-1,\ p;\ n',\ p-1)]\}, \tag{16}$$

$$M_2 = -\frac{\Gamma(1-p)}{2\gamma}\{e_3^{(1)}e_3^{*(2)}F_+(n-1,\ p-1;\ n'-1,\ p-1)[C_1C_1'^+ \times$$

$$\times(\widetilde{k}_0 - m) + C_3C_3'^+(\widetilde{k}_0 + m) + (C_3C_1'^+ + C_1C_3'^+)\widetilde{k}_3] +$$

$$+ (e_2^{(1)} + ie_1^{(1)})e_3^{*(2)}F_+(n,\ p-1;\ n'-1,\ p-1)[C_2C_1'^+(\widetilde{k}_0 - m) +$$

$$+ C_4C_3'^+(\widetilde{k}_0 + m) + (C_4C_1'^+ + C_2C_3'^+)\widetilde{k}_3] +$$

$$+ e_3^{(1)}(e_2^{*(2)} - ie_1^{*(2)})F_+(n-1,\ p-1;\ n',\ p-1)[C_1C_2'^+(\widetilde{k}_0 - m) +$$

$$+ C_3C_4'^+(\widetilde{k}_0 + m) + (C_3C_2'^+ + C_1C_4'^+)\widetilde{k}_3] +$$

$$+ (e_2^{(1)} + ie_1^{(1)})(e_2^{*(2)} - ie_1^{*(2)})F_+(n,\ p-1;\ n',\ p-1)[C_2C_2'^+(\widetilde{k}_0 - m) +$$

$$+ C_4C_4'^+(\widetilde{k}_0 + m) + (C_4C_2'^+ + C_2C_4'^+)\widetilde{k}_3]\}, \tag{17}$$

$$M_3 = \frac{\Gamma(-p)}{2\gamma}\{(e_2^{(1)} - ie_1^{(1)})(e_2^{*(2)} + ie_1^{*(2)})F_+(n-1,\ p;\ n'-1,\ p) \times$$

$$\times[-C_1C_1'^+(\widetilde{k}_0 - m) - C_3C_3'^+(\widetilde{k}_0 + m) + (C_3C_1'^+ + C_1C_3'^+)\widetilde{k}_3] +$$

$$+ e_3^{(1)}(e_2^{*(2)} + ie_1^{*(2)})F_+(n,\ p;\ n'-1,\ p)[C_2C_1'^+(\widetilde{k}_0 - m) + C_4C_3'^+(\widetilde{k}_0 + m) -$$

$$-(C_4C_1'^+ + C_2C_3'^+)\widetilde{k}_3] + (e_2^{(1)} - ie_1^{(1)})e_3^{*(2)}F_+(n-1,\ p;\ n',\ p) \times$$

$$\times[C_1C_2'^+(\widetilde{k}_0 - m) + C_3C_4'^+(\widetilde{k}_0 + m) - (C_3C_2'^+ + C_1C_4'^+)\widetilde{k}_3] +$$

$$+ e_3^{(1)}e_3^{*(2)}F_+(n,\ p;\ n',\ p)[-C_2C_2'^+(\widetilde{k}_0 - m) - C_4C_4'^+(\widetilde{k}_0 + m) +$$

$$+ (C_4C_2'^+ + C_2C_4'^+)\widetilde{k}_3]\}, \tag{18}$$

при этом $\widetilde{k}_0 = K + \varkappa$, $\widetilde{k}_3 = k_3 + \varkappa_3$, а

$$F_\pm(m,\ q;\ m',\ q') = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(m+1)\Gamma(m'+1)}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{i\varkappa_1 y}{\sqrt{2\gamma}}} \times\right.$$

$$\times D_m(y)D_q\left(-y - \frac{\varkappa_2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\right)\int_y^\infty e^{\frac{-i\varkappa_1' x}{\sqrt{2\gamma}}} D_{m'} \times$$

$$\times\left(x + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_2'}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{2}\right)D_{q'}\left(x + \frac{\varkappa_2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\right)dx \pm$$

$$\pm\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{-i\varkappa_1' y}{\sqrt{2\gamma}}} D_{m'}\left(y + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_2'}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{2}\right)D_{q'}\left(-y - \frac{\varkappa_2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\right)\int_y^\infty e^{\frac{i\varkappa_1 x}{\sqrt{2\gamma}}} D_m(x) \times$$

$$\times Dq\left(x+\frac{\varkappa_2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}\right)dx\Big\}. \tag{19}$$

Рассмотрим частный случай рассеяния вперед, когда начальный импульс фотона параллелен магнитному полю, а электрон находится в состоянии $n=0$, $k_3=0$.

В силу структуры величин M_i элемент $M_3=\widetilde{M}_3=0$; кроме того, вычисления дают $M_1+\widetilde{M}_1=0$. Остающаяся в M_2 и $\widetilde{M}_2$ функция $F_+(0,\ p-1;\ n',\ p-1)$ приводится к виду

$$F_+(0,\ p-1;\ n',\ p-1)=\frac{1}{\sqrt{\Gamma(n'+1)}}[1+(-1)^{n'}]\int\limits_{-\infty}^{\infty}dyD_{n'}(y)\times$$

$$\times D_{p-1}(-y)\int\limits_0^{\infty}e^{\frac{-(x+y)^2}{4}}D_{p-1}(x+y)\,dx. \tag{20}$$

Используя в случае $p>0$ (в элементе M_2) интегральное представление $D_{p-1}(x+y)$, после интегрирования по x получаем

$$F_+(0,\ p-1;\ n',\ p-1)=\frac{1+(-1)^{n'}}{\sqrt{\Gamma(n'+1)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dye^{-y^2/4}\times$$

$$\times D_{n'}(y)D_{p-1}(-y)D_{p-2}(y),$$

откуда, вновь прибегая к интегральному представлению функций D_{p-1}, D_{p-2} и представляя $D_{n'}(y)$ в виде $2^{-\frac{n'}{2}}e^{-y^2/4}\frac{d^{n'}}{dt^{n'}}e^{-t^2+\sqrt{2}yt}\Big|_{t=0}$, окончательно находим

$$F_+(0,\ p-1;\ n',\ p-1)=\begin{cases}0 & n'\neq 0\\ \dfrac{2\pi}{\Gamma(2-p)} & n'=0.\end{cases} \tag{21}$$

Аналогично можно показать, что и при $p<0$ (в элементе $\widetilde{M}_2$) результат (21) остается в силе. Отсюда и (14) следует, что частота рассеянного вперед фотона равна частоте падающего фотона, а дифференциальное сечение рассеяния имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma}=\frac{e_0^4\varkappa^2}{(m\varkappa-l\gamma)^2} \tag{22}$$

для фотонов круговой поляризации ($l=+1$ соответствует правой, а $l=-1$ левой поляризации), и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma}=e_0^4\varkappa^2\frac{\varkappa^2m^2(g-2)+\gamma^2(3-g)}{(m^2\varkappa^2-\gamma^2)^2},\quad g=2,3 \tag{23}$$

при рассеянии плоскополяризованных фотонов, причем $g=3$ соответствует поляризации рассеянных фотонов в той же плоскости, что и падающих, а $g=2$ — поляризации рассеянных фотонов в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации падающих фотонов. Из (23) видно, что число рассеянных фотонов, плоскость поляризации которых повернется на угол $\pi/2$, существенно зависит от напряженности магнитного поля и будет тем больше, чем большая длина волны рассматривается.

Приведем результаты вычислений для случая рассеяния назад на покоящемся электроне. Учитывая, что при этом M_1+M_1 определяет сечение рассеяния, не сопровождающееся изменением поляризации фотонов $(l=l')$, имеем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma}=\frac{1+l}{2}\left(1+b'\frac{m}{K_0'}\right)\left(1-b'\frac{K_0'}{K'}\right)4e_0^4\gamma\,\frac{\varkappa'^3\varkappa'[K'(m+2\varkappa)]}{(m\varkappa-\gamma)^2(m\varkappa'-\gamma)^2}, \tag{24}$$

где

$$n'=2,\quad K_0'=(m^2+4\gamma)^{1/2},\quad \varkappa'=(m\varkappa-2\gamma)/(m+2\varkappa).$$

В таком процессе переход электрона из состояния $n=0$ в состояние $n'=0$ оказывается запрещенным. При $n'=n$ сечение рассеяния отлично от нуля лишь в случае $l'=-l$:

$$\frac{d\sigma}{b\Omega_\gamma}=e_0^4\,\frac{\varkappa'^3}{\varkappa}\left\{\frac{1+l}{2\,(m\varkappa-\gamma)^2}+\frac{1-l}{2\,(m\varkappa'+\gamma)^2}\right\}, \tag{25}$$

где

$$\varkappa'=m\varkappa/(m+2\varkappa).$$

В заключение авторы благодарят участников семинара проф. А. А. Соколова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J. «Phys. Rev.», **82**, 664, 1951.
2. Kautna R., Urban P. «Nucl. Phys.», **56**, 518, 1964.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., 1951.
5. Левентуев В. П. Реферат кандид. диссертации. МГУ, 1969; Скобелев В. В. Дипломная работа. МГУ, 1968.
6. Жуковский В. Ч., Херрманн Н. «Ядерная физика», **14**, 150, 1971.
7. Canuto V., Lodenquai J., Ruderman M. «Phys. Rev.», **30**, 2303, 1971.
8. Клепиков Н. П. ЖЭТФ, **26**, 19, 1954.

Поступила в редакцию
2.11 1971 г.

Кафедра
теоретической физики