

И. К. КОСТИН, Ю. М. РОМАНОВСКИЙ

## ФАЗОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Изучаются в линейном приближении фазовые флуктуации в сетях бесконечно большого числа автогенераторов, связанных через проводимость в систему типа решетки произвольной размерности. Получены выражения для средних квадратов разностей фаз любых двух генераторов системы. Изучено их асимптотическое поведение.

Настоящая статья — непосредственное продолжение работы [1], в которой изучались фазовые флуктуации в одномерной цепочке автогенераторов, связанных через проводимость. Биохимические системы в большинстве случаев должны моделироваться не одномерными, а пространственными сетями связанных автогенераторов. Мы изучим в линейном приближении фазовые флуктуации в бесконечных двумерных и трехмерных сетях автогенераторов, связанных через проводимость. Расчет фазовых флуктуаций проводится как для случая, когда интенсивности шумов всех генераторов одинаковы, так и для случая, когда шумящим является лишь один выделенный генератор.

1. Фазовые флуктуации в бесконечной одномерной цепочке связанных автогенераторов в предположении, что шумит лишь генератор с номером  $K$ , описываются уравнениями (вывод и обозначения см. [1])

$$\varphi_i(t) = \frac{\alpha}{2} (\varphi_{i-1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i+1}(t)) + \frac{1}{\omega A} \xi(t) \delta_i K. \quad (1)$$

Без ограничения общности можно считать  $K > 0$ . Мы предполагаем использовать дискретное преобразование Лапласа [2]

$$\Phi(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} \varphi_n(t) \quad \varphi_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} \Phi(p, t) e^{pn} dp. \quad (2)$$

Преобразование Лапласа (2) не использует значений  $\varphi_n(t)$  при  $n < 0$  и не может без оговорок быть применено для изучения системы (1). Однако, если  $K$  достаточно велико, можно изучать распространение флуктуаций фазы, вызванных шумом в  $K$ -том генераторе, пренебрегая эффектом «обрезания» цепочки при отрицательных номерах генераторов.

С этой оговоркой применим преобразование Лапласа (2) к урав-

нениям (1). Тогда, пренебрегая граничными эффектами, получим уравнение для  $\Phi(p, t)$

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} = \alpha (\operatorname{ch} p - 1) \Phi(p, t) + \frac{1}{\omega \bar{A}} e^{-pK} \xi(t). \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\tilde{\Phi}(p, t) = e^{pK} \Phi(p, t) = \frac{1}{\omega \bar{A}} \int_0^t \exp\{\alpha \tau (\operatorname{ch} p - 1)\} \xi(t - \tau) d\tau. \quad (4)$$

Далее применим обратное преобразование Лапласа и найдем

$$\langle \Phi_{k+n}(t) \Phi_{k+m}(t) \rangle = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} \langle \tilde{\Phi}(p, t) \tilde{\Phi}(q, t) \rangle e^{pn+qm} dp dq. \quad (5)$$

Из (3) без труда получается

$$\langle \tilde{\Phi}(p, t) \tilde{\Phi}(q, t) \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2} \int_0^{\alpha t} \exp\{\tau (\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q - 2)\} d\tau, \quad (6)$$

что после элементарных преобразований с учетом (5) дает

$$\langle (\Phi_{k+n} - \Phi_{k+m})^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2} \int_0^{\infty} [I_n(\tau) - I_m(\tau)]^2 e^{-2\tau} d\tau. \quad (7)$$

В (7) мы перешли к пределу  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует установлению стационарного режима. Результат (7) является искомым выражением для средних квадратов разностей фаз автогенераторов, вызванных шумом в генераторе с номером  $K$ . Исходя из (7) можно найти средние квадраты разностей фаз генераторов в случае, когда шумы в отдельных автогенераторах одинаковы по интенсивности и не коррелированы между собой. В этом случае средние квадраты разностей фаз, вызванных шумами в каждом из генераторов, складываются и

$$\langle (\Phi_k - \Phi_{k+m})^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n(\tau) - I_{n-m}(\tau)]^2 e^{-2\tau} d\tau. \quad (8)$$

Воспользуемся результатом [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\tau) I_{n-m}(\tau) = I_m(2\tau)$$

и получим

$$\langle (\Phi_k - \Phi_{k+m})^2 \rangle = \frac{N}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2} \int_0^{\infty} [I_0(\tau) - I_m(\tau)]^2 e^{-\tau} d\tau. \quad (9)$$

Интеграл в (9) вычисляется, и получающаяся формула  $\langle (\Phi_0 - \Phi_m) \rangle = \frac{Nm}{2\alpha\omega^2 \bar{A}^2}$  подтверждает результаты (8) и (9) работы [1].

2. Фазовые флуктуации в двумерной бесконечной сети автогенераторов в предположении, что шумит лишь генератор с номером  $(K_1, K_2)$ , описываются системой уравнений, аналогичной (1):

$$\dot{\varphi}_{i,j} = \frac{\alpha}{2} (\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j}) + \frac{1}{\omega A} \xi(t) \delta_{iK_1} \delta_{iK_2}. \quad (10)$$

Для трехмерной сети генераторов аналогичное уравнение фазовых флуктуаций имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{i,j,k} = & \frac{\alpha}{2} (\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \\ & + \varphi_{i,j,k-1} + \varphi_{i,j,k+1} - 6\varphi_{i,j,k}) + \frac{1}{\omega A} \xi(t) \delta_{iK_1} \delta_{jK_2} \delta_{kK_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следуя схеме рассуждений п. 1 с привлечением повторных преобразований Лапласа по различным индексам, получим следующие результаты.

Для двумерной сети в предположении, что шумит лишь один генератор с номером  $(K_1, K_2)$ :

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_{K_1+k_1, K_2+k_2} - \varphi_{K_1+n_1, K_2+n_2})^2 \rangle = \\ & = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \int_0^\infty [I_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau) - I_{n_1}(\tau) I_{n_2}(\tau)]^2 e^{-4\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Для двумерной сети в предположении, что шумы в различных генераторах некоррелированы и одинаковы по интенсивности:

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_{K_1, K_2} - \varphi_{K_1+n_1, K_2+n_2})^2 \rangle = \\ & = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \int_0^\infty [I_0^2(\tau) - I_{n_1}(\tau) I_{n_2}(\tau)] e^{-2\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Для трехмерной сети в предположении, что шумит лишь один генератор с номером  $(K_1, K_2, K_3)$ :

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_{K_1+k_1, K_2+k_2, K_3+k_3} - \varphi_{K_1+n_1, K_2+n_2, K_3+n_3})^2 \rangle = \\ & = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \int_0^\infty [I_{k_1}(\tau) I_{k_2}(\tau) I_{k_3}(\tau) - I_{n_1}(\tau) I_{n_2}(\tau) I_{n_3}(\tau)]^2 e^{-6\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Для трехмерной сети в предположении, что шумы различных автогенераторов некоррелированы и одинаковы по интенсивности:

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_{K_1, K_2, K_3} - \varphi_{K_1+n_1, K_2+n_2, K_3+n_3})^2 \rangle = \\ & = \frac{N}{2\alpha\omega^2 A^2} \int_0^\infty [I_0^3(\tau) - I_{n_1}(\tau) I_{n_2}(\tau) I_{n_3}(\tau)] e^{-6\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Изучим асимптотическое поведение интегралов типа

$$D_n(k_1, \dots, k_n) = \int_0^\infty [I_0^n(\tau) - I_{k_1}(\tau) \dots I_{k_n}(\tau)] e^{-n\tau} d\tau.$$

Сходные с ними интегралы

$$R_n(k_1, \dots, k_n) = \int_0^{\infty} [I_0^n(\tau) - I_{k_1}(\tau) \dots I_{k_n}(\tau)]^2 e^{-2n\tau} d\tau$$

сводятся к ним при помощи соотношения

$$R_n(k_1, \dots, k_n) = 2D_{2n}(0, k_1, \dots, 0, k_n) - D_{2n}(k_1, k_1, \dots, k_n, k_n). \quad (16)$$

Интеграл  $D_n$  порядка  $n = 1$  может быть вычислен точно [4]:

$$D_1(k) = k. \quad (17)$$

В частном случае  $k_1 = k_2$  можно точно вычислить интеграл  $D_n$  порядка  $n = 2$ :

$$D_2(k, k) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1-x^{2k}}{1-x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right). \quad (18)$$

При выводе (18) используется интегральное представление произведения [3] и преобразование Лапласа [4] бесселевых функций много аргумента. Ясно, что  $D_2(k, k)$  растет как  $\text{const} + \frac{1}{2} \ln k$  при  $k \rightarrow \infty$ . Из соображений симметрии ясно, что множество узлов  $(k_1, k_2)$ , удовлетворяющих условию

$$D_2(k_1, k_2) \leq \Gamma, \quad (19)$$

при больших  $\Gamma$  образует круг на плоскости  $(k_1, k_2)$ . Это предположение подтверждают расчеты  $D_2(k_1, k_2)$  на ЭВМ. На рисунке показаны области, отвечающие условию (19) при  $\Gamma = 0,75, 1$  и  $1,25$ . Радиус круга легко определяется с помощью (18).

Наконец покажем, что при  $n \geq 3$

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} D_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int_0^{\infty} I_0^n(\tau) e^{-n\tau} d\tau. \quad (20)$$

С помощью  $\lim_{k_i \rightarrow \infty}$  обозначен предел при условии, что хотя бы одно из чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$  стремится к бесконечности.

Доказательство формулы (20) следует из равенства

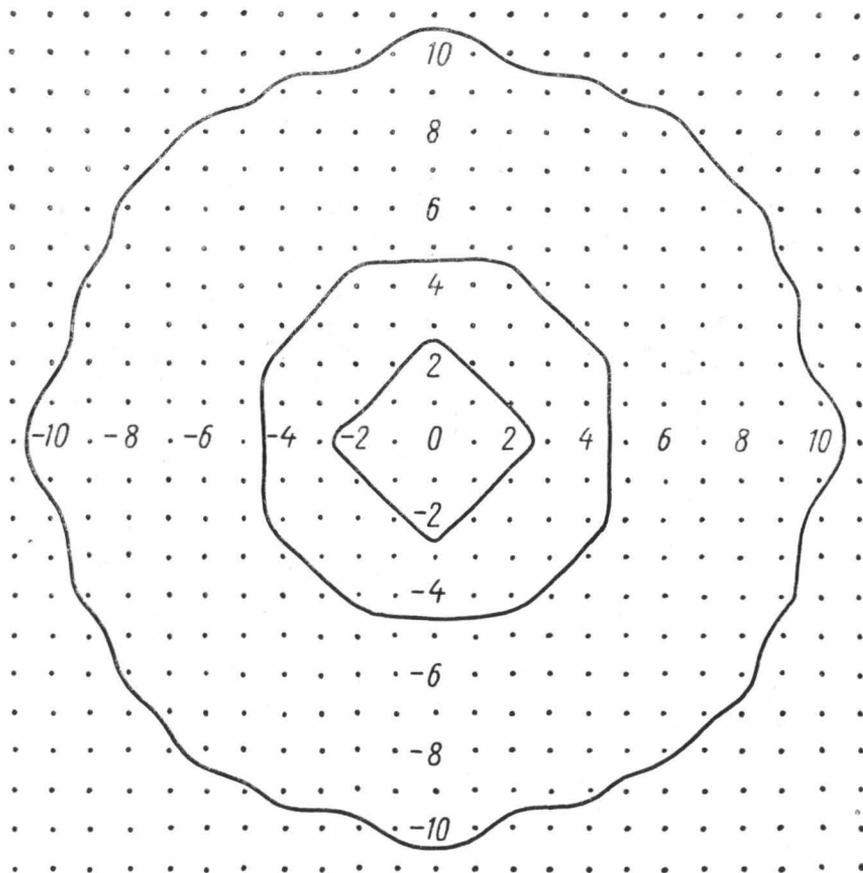
$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} I_{k_1}(\tau) \dots I_{k_n}(\tau) e^{-n\tau} d\tau = \\ & = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k_1 x_1 \dots \cos k_n x_n}{n - \cos x_1 - \dots - \cos x_n} dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (21)$$

и теоремы Римана о коэффициентах ряда Фурье ([5],  $n^\circ 682$ ), применимой вследствие того, что при  $n \geq 3$   $\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx_1 \dots dx_n}{n - \cos x_1 - \dots - \cos x_n}$  сходится абсолютно.

В приложениях теории важно уметь определять число и расположение автогенераторов, работающих синхронно при данном уровне

шума. Будем считать, что автогенераторы из некоторой совокупности — «кластера» работают синхронно, если средний квадрат разности фаз любых двух генераторов кластера не превосходит  $\pi^2$ . Тогда из изложенных результатов следует, что при условии

$$N < \frac{2\pi^2\alpha\omega^2 A^2}{\int_0^{\infty} I_0^3(\tau) e^{-3\tau} d\tau}$$



бесконечная трехмерная сеть генераторов образует кластер. Одномерная и двумерная сети генераторов могут образовывать лишь кластеры конечных размеров, определяемых из формул (9), (13), (17), (18).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костин И. К., Романовский Ю. М. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., 13, № 6, 1972.
2. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., «Наука», 1969.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию  
10.11 1971 г.

Кафедра общей физики  
для мехмата