Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1973

УДК 539.126

ХЕЛЛАЛЬ ЭЛЬ ХАСЕН

РЕГУЛЯРИЗАЦИИ «ПРЕДЕЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ» В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Рассматривается применение регуляризации «предельного представления» (предложено Д. А. Славновым [1, 2, 3]) в электродинамике. Формулируются условия, при которых предлагаемая регуляризация эквивалентна R-операции Боголюбова.

В работах [1, 2 и 3] был предложен метод регуляризации, так называемое «предельное представление» (ПП). Все пропагаторы полей рассматриваются как слабый предел непрерывных функций

$$\Delta^c(x) = \lim_{\nu\to 0} \Delta^c(x, \nu) = \lim_{\nu\to 0} \int dk e^{ikx} \sum \frac{c_i(\nu)}{m^2 \mathfrak{M}_i(\nu) - k^2 - i\varepsilon},$$

а константы $c_i(\nu)$ и $\mathfrak{M}_i(\nu)$ удовлетворяют условиям Паули—Вилларса [4]. С помощью предельного представления может быть сформулировано правило перемножения пропагаторов, обеспечивающее конечность матричных элементов S-матрицы. Если же на параметры $c_i(\nu)$ и $\mathfrak{M}(\nu)$ наложим условия типа

$$\lim_{\nu\to 0} \sum_i c_i(\nu) \mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu) \operatorname{Ln}^{\beta} \mathfrak{M}_i(\nu) = A_{\alpha,\beta} < +\infty, \tag{1}$$

то все матричные элементы S-матрицы до n-ого порядка теории возмущения окажутся конечными и совпадут с матричными элементами S-матрицы, регуляризованными R-операцией Боголюбова [5, 6]. Этот метод является некоторой модификацией регуляризации Паули—Вилларса [6] и отличается от нее следующим. Во-первых, при регуляризации Паули — Вилларса замкнутые спинорные циклы регуляризуются с помощью одной массы M; в рассматриваемом методе регуляризация всех линий проводится по отдельности; во-вторых, регуляризация Паули—Вилларса является лишь промежуточной регуляризацией, так как при устремлении вспомогательных масс к бесконечности в матричных элементах вновь появляется расходимость. Рассматриваемая регуляризация, благодаря условиям типа (1), является окончательной (при устремлении ν к нулю расходимостей не возникает). С нашей точки зрения, второй пункт существен, так как он показывает обобщенный характер регуляризации предельного представления. В работах [1, 2, 3] рассматривался случай одного самодействующего скалярного поля, однако этот способ регуляризации может быть обобщен и перенесен на другие типы взаимодействия, и в частности на электродинамику, что и делается в данной работе.

Применение регуляризации предельного представления в электродинамике

Рассмотрим в качестве модели спинорную электродинамику и попытаемся сформулировать этот метод регуляризации. Как и в [1, 2, 3], спинорные и фотонные пропагаторы полей рассматриваются как слабый предел непрерывных функций:

$$D^c(x) = \lim_{\nu\to 0} D^c(x, \nu) = \lim_{\nu\to 0} \int dk e^{ikx} \sum_i \frac{a_i(\nu)}{m^2 \mathfrak{M}_i^2(\nu) - k^2 - i\varepsilon},$$

$$S^c(x) = \lim_{\mu\to 0} S^c(x, \mu) = \lim_{\mu\to 0} \int dk e^{ikx} \sum_i b_i(\mu) \frac{m + \hat{k}}{m^2 \mathfrak{N}_i^2(\mu) - k^2 - i\varepsilon},$$

где константы $a_i(\nu)$, $\mathfrak{M}_i(\nu)$, $b_i(\mu)$, $\mathfrak{N}_i(\mu)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_i a_i(\nu)\, \mathfrak{M}_i^\alpha(\nu) = 0 \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_i b_i(\mu)\, \mathfrak{N}_i^\alpha(\mu) = 0 \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Такое представление дает возможность сформулировать правило перемножения пропагаторов, обеспечивающее конечность элементов S-матрицы. Такие матричные элементы можно определить как интеграл от произведения обобщенной функции на достаточно гладкую функцию и выразить следующим образом:

$$\mathcal{R}_n(g) = \mathcal{P} \lim_{(\nu)\to 0} \mathcal{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dx_1 \ldots dx_n g(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i<j} D^c(x_i -$$

$$- x_j;\ \nu_\alpha) \prod_{r<\beta} S^c(x_r - x_\beta, \mu_\beta),$$

где $\mathcal{P} = \frac{1}{N!} P(\nu_1, \ldots, \nu_N)$ — сумма по всем перестановкам $(\nu_1, \ldots, \nu_N)$,

$$\lim_{(\nu)\to 0} = \lim_{\nu_1\to 0} \lim_{\nu_2\to 0} \ldots \lim_{\nu_N\to 0}.$$

Основная теорема

Пусть $G_n = G\{V_n : L\}$ — диаграмма n-ного порядка теории возмущения, состоящая из n вершин V и L внутренних спинорных и фотонных линий.

Пусть

$$\mathcal{G}_n(K) = R(G_n) \int dP \Pi_n(P; K)$$

есть матричный элемент, соответствующий диаграмме G_n, регуляризованный R-операцией Боголюбова, и

$$\mathcal{R}_n(K) = \mathcal{P} \lim_{(\nu)\to 0} \mathcal{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dP \Pi_n(P; K; (\nu), (\mu)) \tag{3}$$

матричный элемент диаграммы G_n, регуляризованный с помощью предельного представления, где Π_n — произведение всех пропагаторов диаграммы, $P=P(P_1, ..., P_n)$ — совокупность всех внутренних импульсов, $K=K(K_1, ..., K_j)$ — совокупность всех внешних импульсов.

Если параметры $\mathfrak{M}_i(\nu)$ и $\mathfrak{N}_i(\nu)$ удовлетворяют равенствам

$$\lim_{\nu\to 0} \sum_i a_i(\nu)\mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu)\,\mathrm{Ln}^{\beta}\mathfrak{M}_i(\nu) = A_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

($\beta \leqslant n+2-L_{ext}$, где L_{ext}—число внешних линий, n—порядок ряда теории возмущения $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$) и

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu)\mathfrak{N}_i^{\alpha}(\mu)\,\mathrm{Ln}^{\beta}\mathfrak{N}_i(\mu) = B_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

$$\alpha = \beta = 0, 1.$$

Если предельный переход по параметрам, соответствующим спинорным пропагаторам, совершить до предельного перехода по параметрам, соответствующим фотонным пропагаторам, тогда регуляризация предельного представления совпадает с R-операцией Боголюбова:

$$R(G_n)\int dP\Pi_n(P, k) = \mathscr{P}\lim_{(\nu)\to 0}\mathscr{P}\lim_{(\mu)\to 0}\int dP\Pi_n(P, K:(\nu), (\mu)).$$

Специальное представление R-операции Боголюбова

Введем некоторое определение, удобное для рассмотрения связи R-операции с операцией предельного представления.

Определение 1. Примем следующее определение R-операции:

$$R(G_n) = \{1 - M(G_n)\}\Big\{1 + \sum_{G_n=G_1*\ldots*G_m}\Delta(G_1)\ldots\Delta(G_m)\Big\} + r(G_n). \tag{4}$$

В отличие от общепринятого определения введем $r(G_n)$-операцию, действие которой на матричный элемент диаграммы G_n дает полином

$$r(G_n)\int dP\Pi_n(P; K) = \Omega_n(K) = \sum_{\theta=0}^{\omega(G_n)} C_{\theta}K^{\theta},$$

$\omega(G_n)$ — индекс расходимости диаграммы G_n, C — константа.

Определение 2. Произведем в соотношении (3) разбиение на обобщенные вершины следующим образом. Сначала зафиксируем одну линию l_α из совокупности фотонных линий (для диаграмм, содержащих лишь спинорные линии, будем фиксировать одну спинорную линию). Для этой линии l_α можно найти соответствующую ей совокупность обобщенных вершин $\{G_{i_1}^{\alpha}, G_{i_2}^{\alpha}, \ldots\}$, у которых вершины v_α, соединяемые фотонной линией l_α, входят лишь в G_i^{α}. Учитывая введенные определения, в соотношении (5) член $\sum_{G_n}\Delta(G_1)$ ... $\Delta(G_m)$ (который для удобства будем писать Σ) можно представить так:

$$\sum_{G_n} = \sum_{G_n}{}''\Delta(G_1)\ldots\Delta(G_m) + \sum_{G_n=G_1*\ldots*G_i^{\alpha}*\ldots*G_m}{}' U_i\Delta(G_i^{\alpha}), \tag{5}$$

где

$$U_i = \Delta(G_1)\ldots\Delta(G_{i-1})\,\Delta(G_{i+1})\ldots\Delta(G_m).$$

Σ' обозначает, что суммирование производится по таким разбиениям G_n на обобщенные вершины G_m, при которых вершины v_α входят в одну обобщенную вершину G_i^α из G_m; Σ'' обозначает, что суммирование производится по таким разбиениям G_n на такие обобщенные вершины G_m, при которых $v_\alpha \overline{\in} G_m$. Если в диаграмме G_n разорвем фиксируемую линию l_α, то из соотношения (5) следует

$$\sum_{\bar{G}_n^\alpha} = \sum_{\bar{G}_n^\alpha}'' + \sum_{G_n = G_1 * \ldots * \bar{G}_i^\alpha * \ldots * G_m}' U_i \Delta(\bar{G}_i^\alpha), \tag{6}$$

где $\bar{G}_n^\alpha$ — обобщенная вершина, полученная из G_i^α разрывом линией l_α.

Из соотношений (5) и (6) получим

$$\sum_{G_n} = \sum_{\bar{G}_n^\alpha} + \sum_{G_n}' U_i [\Delta(G_i^\alpha) - \Delta(\bar{G}_i^\alpha)].$$

Повторяя это рассуждение для каждой фотонной линии диаграммы, получим

$$R(G_n) - r(G_n) = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{m} \{1 - M(G_n)\} \left\{ R(\bar{G}_n^\alpha) + \sum_{G_n}' U_i [\Delta(G_i^\alpha) - \Delta(\bar{G}_i^\alpha)] \right\}.$$

Преобразуем разность $[\Delta(G_i^\alpha) - \Delta(\bar{G}_i^\alpha)]$ следующим образом:

$$\Delta(G_i^\alpha) - \Delta(\bar{G}_i^\alpha) = r(G_i^\alpha) - M(G_i^\alpha) R(\bar{G}_i^\alpha) -$$
$$- M(G_i^\alpha) \sum_{G_i^\alpha = G_{i1} * \ldots * G_{ij}^\alpha * \ldots * G_m}' U_j [\Delta(G_j^\alpha) - \Delta(\bar{G}_j^\alpha)], \tag{7}$$

где появился член $\sum_{G_i^\alpha}'$, в котором суммирование производится по разбиениям обобщенной вершины G_i^α на такие обобщенные вершины $\{G_{i1}^\alpha, G_{i2}^\alpha, \ldots$ $\ldots, G_{ij}^\alpha, \ldots\}$, при которых вершины $v_\alpha \in G_{ij}^\alpha$. Формулы (7) и (8) представляют собой рекуррентные соотношения разбиения. Продолжая процедуру разбиения суммы по такому же методу до неприводимых диаграмм, окончательно получим

$$R(G_n) = r(G_n) + \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i}' \hat{N}_i r(G_i^\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ R(\bar{G}_n^\alpha) - M(G_n) R(\bar{G}_n^\alpha) - \sum_{i}' \hat{N}_i M(G_i^\alpha) R(\bar{G}_i^\alpha) \right\}, \tag{8}$$

где M — число внутренних фотонных линий $\{l\}$ диаграммы G_n, α — индекс внутренних фиксированных линий, G_i^α — обобщенная вершина, содержащая фотонную линию l_α $(v_\alpha \in G_i^\alpha)$, $\bar{G}_i^\alpha$ — обобщенная вершина, полученная из G_i^α разрывом линией l_α, $\sum_i'$ — как и в соотношении (5), штрих обозначает, что суммирование проводится по разбиениям G_n на обобщенные вершины G_m, при которых $v_\alpha \in G_i^\alpha$; а i — что сумма здесь берется по всем возможным обобщенным вершинам G_i^α, $\widehat{N}_i = \{1 - M(G_n)\} \prod_\rho U_{i\rho}$ ($U_{i\rho}$ определяется формулой (5)).

Прежде чем применить операцию $R(G_n)$ к коэффициентной функции $\Pi_n(P;\ K)$ и дать окончательный вид регуляризованного матричного элемента, представим $\Pi_n(P;\ K)$ в удобном для нас виде, а именно в виде произведений двух функций:

$$\Pi_n(P_j K) = \pi_i^\alpha(p_\alpha, \{P\}_i^\alpha;\ \widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K))\,\rho_i(\widetilde{P};\ \widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K)),$$

где π_i^α — произведение всех пропагаторов, соответствующих внутренним линиям обобщенной вершины G_i^α, ρ_i — произведение всех остальных пропагаторов обобщенной диаграммы G_n, p_α, $\{p\}_i^\alpha$ — совокупность внутренних импульсов обобщенной вершины, $\widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K)$ — совокупность внешних импульсов обобщенной вершины G_i^α (здесь импульсы $\widetilde{\tau}_i^\alpha$ будут внешними для G_i^α, но внутренними для G_n), $\widetilde{P}$ — все остальные внутренние импульсы обобщенной диаграммы G_n.

Утверждение. Пусть $\{\tau_\sigma^\alpha\}$ — набор внешних импульсов диаграммы G_i^α с фиксированными значениями $\tau_\sigma \in \widetilde{\tau}$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\Delta(G_i^\alpha)\,\pi_i^\alpha(p_\alpha, \{P\}_i^\alpha;\ \widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K)) = \sum_\sigma f_\sigma(\tau_{i,\sigma}^\alpha;\ \widetilde{\tau}_i^\alpha)\,\Delta(G_i^\alpha)\,\pi_i^\alpha(p_\alpha, \{P\}_i^\alpha;\ \tau_{i,\sigma}^\alpha), \quad (9)$$

где f_σ — некоторая функция, зависящая от $\{\tau_\sigma\}$ и $\widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K)$. Подставляя в соотношение (3) операцию $R(G_n)$ и коэффициентную функцию Π_n, определенные формулами (7), (8) соответственно, и учитывая соотношение (9), получим

$$\mathcal{G}_n(K) = \Omega_n(K) + \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\sigma,i}\Omega_i^\alpha(\tau_{i,\sigma})\,\omega_i(\tau_{i,\sigma}, K) +$$

$$+\frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{m}\int dp_\alpha D^c(p_\alpha)\Big\{\overline{\mathcal{G}}_n^\alpha(p_\alpha, K) - M(G_n)\,\overline{\mathcal{G}}_n^\alpha(p_\alpha, K) -$$

$$-\sum_{\sigma,i} M(G_i^\alpha)\,\overline{\mathcal{G}}_i^\alpha(p_\alpha, \tau_{i,\sigma})\,\omega_i(\tau_{i,\sigma};\ K)\Big\}, \quad (10)$$

где

$$\omega_i(\tau_{i,\sigma};\ K) = \sum{}' \widehat{N}_i \int d\widetilde{\tau}_i d\widetilde{P} f_\sigma(\tau_{i,\sigma}^\alpha;\ \widetilde{\tau}_i^\alpha)\,\rho_i(\widetilde{P};\ \widetilde{\tau}_i^\alpha(\tau, K)),$$

σ — индекс, различающий разные фиксированные значения внешних импульсов.

Доказательство основной теоремы

Сначала для упрощения дальнейшего рассуждения рассмотрим диаграммы, имеющие лишь спинорные линии, и покажем, что для этого случая справедлива основная теорема. Далее на основе этих результатов рассмотрим диаграммы, в которые включим сначала одну, а затем любое (но конечное) число фотонных линий, и покажем правильность теоремы. Отметим, что во всех рассуждениях будем рассматривать только связанные диаграммы, так как регуляризация несвязанных диаграмм сводится к регуляризации их связанных частей. В электродинамике с учетом теоремы Фарри для диаграмм, имеющих лишь спинорные линии, известно, что расходимости появляются только в диаграммах второго и четвертого порядка теории возмущений. В силу этого достаточно рассмотреть эти частные случаи, чтобы установить теорему для диаграмм, имеющих лишь спинорные линии.

Пусть имеется связанная диаграмма $G_2=G\{V_2:L_2\}$ второго порядка теории возмущений, состоящая только из двух внутренних спинорных линий L_2 и двух вершин V_2. Тогда ее матричный элемент, регуляризованный с помощью ПП, имеет вид

$$\mathscr{R}_2^{ij}(K)=\mathscr{P}\lim_{(\mu_1\mu_2)\to 0}\int drSp\,\{\gamma^i S(r,\mu_1)\,\gamma^j S(r-k,\mu_2)\}. \tag{11}$$

Благодаря соотношению (4) при больших импульсах регуляризованный пропагатор ведет себя как $\sim r^{-4}$ и, следовательно, в формуле (11) возможно совершить один предельный переход, не нарушив сходимости интеграла. Если учесть симметрию выражения (11) по μ_1 и μ_2, то его можно выразить таким образом:

$$\mathscr{R}_2^{ij}(K)=\lim_{\mu\to 0}\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)=\lim_{\mu\to 0}\int drSp\,\{\gamma^i S(r,\mu)\,\gamma^j S(r-K)\}. \tag{12}$$

Совершение предела под знаком интеграла в выражении (12) теперь запрещено, так как оно приведет к квадратично расходящемуся интегралу. Чтобы обойти эту трудность, будем пользоваться приемом вспомогательного вычитания

$$\mathscr{R}_2^{ij}(K)=\lim_{\mu\to 0}\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)-\{\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)\}_3^K]+\lim_{\mu\to 0}\{\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)\}_3^K,$$

где

$$\{\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)\}_3^K=\int drSp\Big\{\gamma^i S(r,\mu)\,\gamma^j S(r)+$$

$$+\sum_a g^{aa}K^a\gamma^i S(r,\mu)\,\gamma^j\frac{\partial}{\partial K^a}S(r-K)\Big|_{K^a=0}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{a,b}g^{aa}g^{bb}K^aK^b\gamma^i S(r,\mu)\,\gamma^j\frac{\partial^2 S(r-K)}{\partial K^a\partial K^b}\Big|_{K^a=K^b=0}\Big\}.$$

Тогда в выражении, стоящем в квадратных скобках, можно совершить предельный переход под знаком интеграла, при этом получающийся интеграл будет абсолютно сходиться, а $\lim\limits_{\mu\to 0}\{\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)\}_3^K$ вычисляется явно

$$\lim_{\mu\to 0}\{\mathscr{R}_2^{ij}(K,\mu)\}_3^K=2\pi^2 im^2 g^{ij}\lim_{\mu\to 0}\sum_i b_i(\mu)\,(\mathfrak{R}_i(\mu)-1)\,\mathrm{Ln}\,\mathfrak{R}_i(\mu)+$$

$$+\frac{4}{3}\pi^2 i\,(K^iK^j-g^{ij}K^2)\left\{\lim_{\mu\to 0}\sum_i b_i(\mu)\,\mathrm{Ln}\,\mathfrak{R}_i(\mu)-\frac{1}{2}\right\}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы выражение (13) было бы конечным, необходимо наложить условия:

$$A_{0,1} = \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) \operatorname{Ln} \mathfrak{N}_i(\mu) < +\infty,$$
$$A_{1,1} = \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) \mathfrak{N}_i(\mu) \operatorname{Ln} \mathfrak{N}_i(\mu) < +\infty. \quad (14)$$

Тогда матричный элемент может быть написан в таком виде:

$$R_2^{ij}(K) = [R_2^{ij}(K) - \{R_2^{ij}(K)\}_3^K] + C_0^{ij} + \frac{1}{2}\sum_{a,b} g^{aa}g^{bb}K^aK^bC_2^{ijab}, \quad (15)$$

где

$$C_0^{ij} = 2\pi^2 im^2 g^{ij}(A_{1,1} - A_{0,1}),$$
$$C_2^{ijab} = \frac{4}{3}\, i\pi^2 \{g^{ia}g^{jb} + g^{ja}g^{ib} - 2g^{ij}g^{ab}\}\left(A_{0,1} - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда немедленно следует, что матричный элемент, регуляризованный с помощью ПП, точно совпадает с матричным элементом диаграммы G_2, регуляризованным R-операцией Боголюбова, определенной формулой (4). Теперь рассмотрим диаграмму четвертого порядка теории возмущения. Пусть $G_4 = G\{V_4 : L_4\}$ — диаграмма, состоящая из четырех спинорных линий. Аналогично первому случаю при наложении условия (14) матричный элемент становится конечным и запишется следующим образом:

$$\mathscr{R}_4^{ijkl}(K) = \{1 - M(G_4)\}\int dr Sp\{\gamma^i S(r + k_1)\gamma^j S(r +$$
$$+ k_2)\gamma^k S(r + k_3)\gamma^l S(r)\} + C_0^{ijkl},$$

где

$$\{1 - M(G_4)\}\mathscr{R}_4^{ijkl}(K) = [\mathscr{R}_4^{ijkl}(K) - \mathscr{R}_4^{ijkl}(0)],$$
$$C_0^{ijkl} = \frac{4}{3}\, i\pi^2 \{g^{ik}g^{jl} + g^{jk}g^{il} - 2g^{ij}g^{kl}\}\left(A_{0,1} - \frac{1}{2}\right).$$

Правая часть соотношения (15) есть не что иное, как матричный элемент диаграммы G_4, регуляризованный R-операцией Боголюбова. Таким образом, в том случае, когда диаграмма имеет лишь внутренние спинорные линии, справедливость теоремы установлена.

Перейдем к доказательству основной теоремы в общем случае. Воспользуемся тем, что теорема в низших порядках уже установлена. Доказательство проведем методом индукции.

Пусть $G_n = G\{V_n : L\}$ — диаграмма Фейнмана n-ного порядка, состоящая из n вершин и L внутренних спинорных и фотонных линий. Пусть $G_{n+1} = G\{V_{n+1} : L\}$ — диаграмма $(n+1)$-го порядка, состоящая из $n+1$ вершин и L' внутренних спинорных и фотонных линий, полученная из диаграммы G_n включением одной фотонной линии.

Предположим, что основная теорема справедлива для диаграмм до n-го порядка. Докажем, что теорема также справедлива для диаграммы G_{n+1}, $(n+1)$-го порядка теории возмущений.

С учетом определения (2) и выражения

$$\mathscr{P}\lim_{(\nu)\to 0} = \frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1} \lim_{\nu_\alpha\to 0} \mathscr{P}\lim_{(\bar{\nu}_\alpha)\to 0}, \quad (\bar{\nu}_\alpha) = (\nu_1, \ldots, \nu_{\alpha-1}; \nu_{\alpha+1}, \ldots, \nu_{M+1}),$$

матричный элемент диаграммы G_{n+1}, регуляризованный с помощью предельного представления, примет вид

$$\mathscr{R}_{n+1}(K)=\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\left\{\mathscr{P}\lim_{(\bar{\nu}_\alpha)\to 0}\mathscr{P}\lim_{(\mu)\to 0}\times\right.$$

$$\left.\times\int d\bar{P}^\alpha\bar{\pi}^\alpha_{n+1}(p_\alpha, \bar{P}^\alpha; K:(\bar{\nu}_\alpha), (\mu))\right\}. \qquad (16)$$

В соотношении (16) под скобкой выражение представляет собой матричный элемент диаграммы $\bar{G}^\alpha_{n+1}$, регуляризованный с помощью ПП. Отметим, что $\bar{G}^\alpha_{n+1}$ получается из $\bar{\mathscr{G}}^\alpha_{n+1}$ разрывом фотонной линии l_α. Допустим, что имеет место следующее соотношение:

$$\bar{G}^\alpha_{n+1}(P_\alpha; K)=\mathscr{P}\lim_{(\bar{\nu}_\alpha)\to 0}\mathscr{P}\lim_{(\mu)\to 0}\int d\bar{P}^\alpha\bar{\pi}^\alpha_{n+1}(p_\alpha, \bar{P}^\alpha; K:(\bar{\nu}_\alpha), (\mu)) \qquad (17)$$

(но позже это предположение обсуждается). Тогда можно представить соотношение (16) таким образом:

$$\mathscr{R}_{n+1}(K)=\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\,\bar{\mathscr{G}}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K). \qquad (18)$$

В свою очередь соотношение (18) можно представить так:

$$\mathscr{R}_{n+1}(K)=\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\{G^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K)-\mathscr{F}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K)\}+$$

$$+\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\,\mathscr{F}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K). \qquad (19)$$

Если $\mathscr{F}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K)$ выбираем в таком виде:

$$\mathscr{F}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K)=M(G_{n+1})\,\bar{\mathscr{G}}^\alpha_{n+1}(p_\alpha; K)+\sum_{\sigma, i}M(G^\alpha_i)\,\bar{\mathscr{G}}^\alpha_i(p_\alpha, \tau_{i,\sigma})\,\omega_i(\tau_{i,\sigma}, K), \qquad (20)$$

то в первом слагаемом выражения (19) можно внести предельный переход под знак интеграла, так как после его совершения интеграл совпадает с абсолютно сходящимся интегралом выражения (10). В результате получим

$$\mathscr{R}_{n+1}(K)=\mathscr{G}_{n+1}(K)+\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\{\lim_{\nu_\alpha\to 0}J^\alpha_{n+1}(K, \nu_\alpha)-\Omega_{n+1}(K)\}+$$

$$+\frac{1}{M+1}\sum_{\sigma, i}\omega_i(\tau_{i,\sigma}, K)\sum_{\alpha=1}^{m+1}\{\lim_{\nu_\alpha\to 0}J^\alpha_i(\tau_{i,\sigma}, \nu_\alpha)-\Omega^\alpha_i(\tau_{i,\sigma})\}, \qquad (21)$$

где

$$J^\alpha_{n+1}(K, \nu_\alpha)=\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\,M(G_{n+1})\,\bar{\mathscr{G}}^\alpha_{n+1}(p_\alpha, K),$$

$$J^\alpha_i(\tau_{i,\sigma}, \nu_\alpha)=\int dp_\alpha D(p_\alpha, \nu_\alpha)\,M(G^\alpha_i)\,\bar{\mathscr{G}}^\alpha_i(p_\alpha, \tau_{i,\sigma}).$$

Следовательно, для того чтобы оба регуляризованных матричных элемента совпадали, необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0} J^{\alpha}_{n+1}(K,\,\nu_\alpha)=\Omega_{n+1}(K),$$

$$\lim_{\nu_\alpha\to 0} J_i^{\alpha}(\tau_{i,\sigma};\,\nu_\alpha)=\Omega_i^{\alpha}(\tau_{i,\sigma}). \tag{22}$$

Для большей наглядности условия (22) удобно пользоваться определениями $M(G)$-операции и полинома Ω. Тогда непосредственно получим

$$\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\int dp_\alpha D(p_\alpha,\,\nu_\alpha)\left\{\frac{\partial^\theta}{(\partial K)^\theta}\,\overline{\mathscr{G}}^{\alpha}_{n+1}(p_\alpha,\,K)\,|_{K=0}\right\}=C \tag{23}$$

(второе соотношение (22) рассматривать не будем, так как оно автоматически выполняется при выполнении условий первого соотношения). Поскольку рассматривается лишь случай ультрафиолетовых расходимостей, нас интересует только верхняя грань интеграла (23), поэтому необходимо иметь сведения об асимптотическом поведении матричного элемента $\overline{\mathscr{G}}^{\alpha}_{n+1}$ и его производных при больших p. Исходя из результатов, полученных Вайнбергом и Финком (12), разбив интеграл в (23) на конечную и асимптотическую часть, получим

$$\frac{1}{M+1}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\lim_{\nu_\alpha\to 0}\left\{\sum_{s,\beta}h_\beta\int^{\infty} dp_\alpha D(p_\alpha,\,\nu_\alpha)\,p_\alpha^{s-\theta}L^{\beta}_{n}p_\alpha\right\}=C, \tag{24}$$

где $0\leqslant\theta\leqslant\omega(G_{n+1})$, $\omega(G_{n+1})$ — индекс расходимости диаграммы G_{n+1}, s и β — асимптотические константы. Следовательно, из (24) получим условие

$$\lim_{\nu\to 0}\sum_i a_i(\nu)\,\mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu)\,Ln^{\beta}\,\mathfrak{M}_i(\nu)=A_{\alpha,\beta}<+\infty,$$

где α, β в зависимости от типов расходящихся диаграмм G_N принимают следующие значения. Для вершинной диаграммы $\alpha=1{,}2$ $0\leqslant\beta\leqslant\frac{N+1}{2}$; для диаграммы с четырьмя внешними фотонными линиями $\alpha=0$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{N+1}{2}$; для диаграммы с двумя внешними фотонными или спинорными линиями соответственно имеется $\alpha=1,2$, $0\leqslant\beta\leqslant N/2$ и $\alpha=2,3,4$, $0\leqslant\beta\leqslant N/2$.

Окончательный ответ сформулируем так. При выполнении условий

$$\lim_{\nu\to 0}\sum_i a_i(\nu)\,\mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu)\,Ln^{\beta}\mathfrak{M}_i(\nu)=A_{\alpha,\beta}\quad \alpha=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\ \ 0\leqslant\beta\leqslant\frac{N+2-L_{\text{ex}}}{2}$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_i b_i(\mu)\,\mathfrak{N}_i^{\alpha}(\mu)\,Ln^{\beta}\mathfrak{N}_i(\mu)=B_{\alpha,\beta}\quad \alpha=\beta=0,\,1$$

$$(L_{\text{ext}}=0,\,2,\,4)$$

в электродинамике матричные элементы, регуляризованные с помощью R-операции и предельного представления, совпадают. Остается лишь показать справедливость предложения (20), поскольку в ходе доказательства основной теоремы мы пользовались им. В соотношении (17) возможны два случая: либо диаграмма $\bar{G}^{\alpha}_{n+1}$ распадается на две несвязанные части, либо она имеет больше концов, чем G_{n+1}. В первом случае формула (17) справедлива в силу только что доказанной теоремы, так как каждая из двух несвязанных диаграмм имеет порядок меньший, чем G_{n+1}. Во втором случае формула (17) справедлива тоже в силу основной теоремы, так как если теорема справедлива для $(n+1)$-го порядка, то она также справедлива для диаграмм высшего порядка. При этом, правда, придется сделать опять предположение типа (17), но для диаграмм с большим числом концов. Однако, повторяя указанные рассуждения достаточное количество раз, придем в конце концов к тому, что соответствующая диаграмма обязательно распадается на две несвязанные, так как порядок теории возмущения ограничен. Таким образом, основная теорема полностью доказана.

В заключение выражаю признательность Д. А. Славнову за постановку задачи и за большую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнов Д. А. ДАН СССР, **3**, 570, 1962.
2. Славнов Д. А. ЖЭФ, № 2, 1543, 1962.
3. Славнов Д. А. Реферат кандидатской диссертации. МГУ, 1963.
4. Pauli W., Willars F. Rev. Mod Phys., **21**, 434, 1949.
5. Парисюк О. С. «Украинский физический журнал», **12**, № 3, 287, 1960.
6. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей, 1957.
7. Weinberg S. Phys. Rev., **118**, 838, 1960.
8. Tames P., Fink. T. Math. Phys., **9**, No. 9, 1389, 1968.

Поступила в редакцию
23.11 1971 г.

Кафедра
квантовой статистики