

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1973

УДК 551.466.443

Г. Е. КОНОНКОВА, В. А. РАЗУМОВ, И. Ф. ШИШКИН

## ГАШЕНИЕ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ В СРЕДЕ С ЕСТЕСТВЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Решена задача о спектре колебаний поверхности воды, находящейся под действием турбулентного ветра. Учтена естественная и искусственная турбулентность воды в море. Полученное решение позволило определить характеристику контраста зон погашенного волнения по отношению к окружающему фону.

В [1] поставлена и решена без учета естественной турбулентности моря задача гашения ветровых волн на поверхности идеальной жидкости сильной «искусственной» турбулентностью в случае, когда обратным влиянием формы морской поверхности на характеристики ветрового потока можно пренебречь. В настоящей работе допущения работы [1] об идеальности жидкости, отсутствии естественной турбулентности и ограничение ранней стадии развития волн и случаем сильной «искусственной» турбулентности в расчет на принимаются.

Рассмотрим тяжелую вязкую жидкость со свободной поверхностью и некоторым начальным уровнем турбулентности, которую будем называть естественной. Качественно различаются два вида естественной турбулентности: турбулентность первого вида порождается ветром, второго — не связанная с ним причинами (течениями, конвективными токами и т. д.). Первая сосредоточена преимущественно в приповерхностном волновом слое, вторая — распределена по всей толще воды. Кроме того, в море может создаваться «искусственная» турбулентность [1].

Диссипация энергии ветровых волн турбулентностью первого вида будет учитываться в дальнейшем с помощью коэффициента турбулентной вязкости, а уменьшение волновой энергии турбулентностями второго и третьего видов — механизмом, рассмотренным в [1].

Пусть в момент  $t=0$  на невозмущенную поверхность жидкости, удовлетворяющей условиям глубокого моря, налагается случайное подвижное давление турбулентного ветра  $p_w(\vec{r}, t)$ , где  $r = \{x_1, x_2\}$  — радиус-вектор точки поверхности. В жидкости в этот момент существует турбулентное движение, являющееся суперпозицией турбулентностей второго и третьего видов и характеризуемое случайным вектором скорости  $\vec{v} = \{v_1^{\circ}, v_2^{\circ}, v_3^{\circ}\}$ .

Необходимо определить форму поверхности воды в момент времени  $t$  в зависимости от всей истории эволюции поля флуктуаций давления, начиная с момента  $t=0$ .

Предположим, что каждый компонент в возникающем спектре ветрового волнения подчиняется теории волн бесконечно малой амплитуды; изменение энергии случайного поля  $\vec{v}$  под действием ветра мало; поле  $\vec{v}$  является однородным и изотропным.

Исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} [-\rho \delta_{ik} - \rho (v_i v_k - \langle v_i v_k \rangle)] + \mu \Delta v_i, \quad (1)$$

$$\partial v_k / \partial x_k = 0, \quad (2)$$

$$p_w = p - \rho g \eta + \rho (v_3^2 - \langle v_3^2 \rangle) - \theta \rho c(k) \partial \eta / \partial t - 2\mu \partial v_3 / \partial x_3, \quad (3)$$

$$\partial \eta / \partial t = -v_3 \text{ при } x_3 = \eta(x_1, x_2, t), \quad (4)$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}, \quad p \rightarrow \dot{p} \text{ при } x_3 \rightarrow \infty \text{ и } t > 0, \quad (5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{R}, 0), \quad p = \dot{p}(\vec{R}, 0), \quad \eta = \dot{\eta}(\vec{R}, 0) \text{ при } t = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\eta$  — пульсации скорости, давления, возвышения поверхности жидкости;  $\dot{p}$  и  $\dot{\eta}$  — пульсации давления и возвышения поверхности, вызванные суперпозицией турбулентностей второго и третьего видов;  $\theta$  — числовой параметр, появляющийся при расчетах устойчивости в работах Майлса [2, 3];  $c(k) = (g/k)^{1/2}$  — фазовая скорость поверхностных волн с волновым числом  $k$ ;  $g$  — ускорение при свободном падении;  $\vec{R} = \{x_1, x_2, x_3\}$  — радиус-вектор в декартовой системе координат,  $x_1, x_2, x_3$ , ось  $Ox_3$  которой направлена вертикально вниз; скобками  $\langle \rangle$  обозначена операция усреднения за время  $T \gg 2\pi/\omega$ ;  $\omega$  — частота ветровых поверхностных волн;  $\rho$  — плотность воды. Коэффициент динамической вязкости  $\mu = \mu_m + \mu_t$ , где  $\mu_m$  — коэффициент молекулярной вязкости;  $\mu_t$  — коэффициент турбулентной вязкости, определяемый из уравнения баланса энергии при волнении [4, 5].

Уравнение (1) получено из уравнения Навье—Стокса подстановкой в него мгновенных значений скорости и давления в воде в виде суммы средних значений и пульсаций с последующим вычитанием из него уравнения Рейнольдса. При этом допущено, что на рассматриваемый процесс влияние произведения средних скоростей на их пульсации пренебрежимо мало. Аналогичным образом получены уравнения неразрывности, граничные и начальные условия.

Подобная по структуре система уравнений без учета диссипации энергии, переданной жидкости ветром, и обратного влияния формы поверхности воды на распределение давления ветра  $p_w$  для идеальной жидкости, приведена в работе [1].

Система уравнений (1)–(6) является незамкнутой и нелинейной.

Положим, что гидродинамические элементы в (1)–(6) можно представить следующим образом:

$$v_i = v'_i + \dot{v}_i, \quad p = p' + \dot{p}, \quad \eta = \eta' + \dot{\eta}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где  $v'_i$ ,  $p'$ ,  $\eta'$  — пульсации скорости, давления, возвышения поверхности, вызванные турбулентным ветром. Пусть

$$\langle v_i^{\prime 2} \rangle \ll \langle \overset{\circ}{v}_i^2 \rangle, \quad i = 1, 2, 3; \quad (8)$$

так же как и в [1], членами вида  $v'_i v'_k$  можно пренебречь.

Подставив (7) в (1) — (6), усредним полученные выражения за время  $\tau \ll 2\pi/\omega$ . При этом допустим, что, как и в [1],  $\langle \overset{\circ}{v} \rangle, \langle \overset{\circ}{p} \rangle, \langle \overset{\circ}{\eta} \rangle = 0$ ,  $\langle \overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{v}_k \rangle = \langle \overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{v}_k \rangle$ ,  $\langle \overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{v}_k \rangle \neq 0$ . (Скобками  $\langle \rangle$  обозначена операция сглаживания за время  $\tau$ .) В результате получим незамкнутую систему линейных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} [-\rho \delta_{ik} - J_{ik} - J_{ki}] + \mu \Delta u_i, \quad (9)$$

$$\partial u_k / \partial x_k = 0, \quad (10)$$

$$p = p_w + \rho g \xi - 2J_{33} + \theta \rho c(k) \partial \xi / \partial t + 2\mu \partial u_3 / \partial x_3, \quad (11)$$

$$\partial \xi / \partial t = -u_3 \text{ при } x_3 = \xi(x_1, x_2, t), \quad (12)$$

$$p \rightarrow 0, \quad u_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, 3 \text{ при } x_3 \rightarrow \infty \text{ и } t = 0, \quad (13)$$

$$u_i p, \xi = 0 \text{ при } t = 0, \quad (14)$$

где

$$p \rangle = p, \quad \overset{\circ}{v}' \rangle \equiv \overset{\circ}{u}, \quad \eta' \equiv \xi,$$

$$J_{ik} = \rho \langle \overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{v}_k \rangle - \rho \langle \overset{\circ}{v}_i \overset{\circ}{v}_k \rangle, \quad (15)$$

$$J_{ik} = \rho \langle \overset{\circ}{v}_k \overset{\circ}{v}_i \rangle - \rho \langle \overset{\circ}{v}_k \overset{\circ}{v}_i \rangle.$$

Как и в [1], входящий в (9) — (14) тензор  $J_{ik}$  является средней за время  $\tau \ll 2\pi/\omega$  плотностью потока импульса  $\rho \overset{\circ}{v}'_i \overset{\circ}{v}'_k$  волнового движения, обусловленного наличием поля  $\overset{\circ}{v}$ .

Центральным в [1] является предположение, что гашение ветрового волнения полем  $\overset{\circ}{v}$  происходит за счет  $J_{i3}$ , т. е. вследствие возникновения потока количества волнового движения из поверхностного слоя в глубь жидкости. Это предположение качественно согласуется с результатами нашего эксперимента. Описание аэрогидроканала имеется в [4].

Турбулентное поле  $\overset{\circ}{v}$  создавалось истекающей в направлении ветрового потока затопленной струей. На рисунке показаны измеренные струнным волнографом частотные спектры возвышений поверхности.

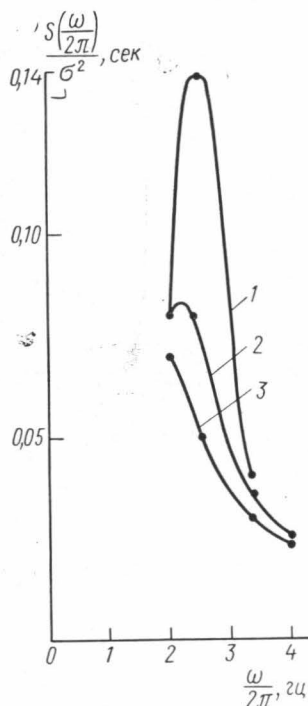
Кривая 1 получена при отсутствии поля  $\overset{\circ}{v}$  и средней скорости ветра  $V_w = 12$  м/сек. Кривая 3 является частотным спектром возвышений поверхности, вызываемых полем  $\overset{\circ}{v}$  в отсутствие ветра. Кривая 2 соответствует измерениям при той же скорости ветра и наличии поля  $\overset{\circ}{v}$ .

Как видно из графиков, взаимодействие поля  $\vec{v}$  с ветровым волнением приводит к уменьшению энергии волнового движения.

В таблице приведены среднеквадратичные значения (мм/сек) высокочастотных (выше 20 гц) пульсаций модуля скорости в воде. Измерения выполнены термогидрометром на ряде последовательных гори-

Заглубле- ние, мм	Условия измерений		
	$V_w=0$ $v^0 \neq 0$	$V_w=$ $=12$ м/сек. $v^0=0$	$V_w=$ $=12$ м/сек. $v^0 \neq 0$
10	0,9	2,9	2,9
50	1,1	2,4	2,8
90	1,5	2,4	2,6
130	1,1	1	2,6
170	1	1	1,7
210	1	1	1
250	0,8	1	1,2
290	0,75	1	1,1

зонтов в условиях, при которых были получены все кривые, приведенные на рисунке<sup>1</sup>. Средняя длина ветровых волн была 20 см. При чисто ветровом режиме среднеквадратичные значения пульсаций убывают с глубиной, и на горизонтах, превышающих половину длины волны, они значительно меньше, чем в волновом слое. Таблица показывает, что при



взаимодействии ветрового волнения с турбулентным полем  $\vec{V}$  среднеквадратичные значения пульсаций модуля скорости на горизонтах, прилегающих к волновому слою (13—17 см), увеличиваются по сравнению с чисто ветровым режимом. Характерно, что на этих горизонтах сумма энергий пульсаций скорости при ветровом волнении и турбулентном потоке, взятых в отдельности меньше энергии пульсаций скорости при их взаимодействии. Сопоставление данных таблицы с графиком свидетельствует о том, что наблюдаемое уменьшение энергии волн происходит за счет турбулентного переноса частиц воды, участвующих в волновом движении, в глубь жидкости. Это качественно согласуется с вышеупомянутым предположением работы [1].

Предположение о том, что гашение ветрового волнения полем  $\vec{v}$  происходит только за счет  $J_{i3}$ , позволяет замкнуть систему уравнений (9)—(14), выразив  $J_{i3}$  через искомые функции волнового движения. Подставляя в (9)—(14) вычисленные, так и в [1], значения  $J_{i3}$ , получаем полную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

<sup>1</sup> Два последних значения в последней колонке таблицы получены при усилившемся ветре.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ -\rho \delta_{ik} - \delta_{k3} \rho \int_0^{\infty} \varphi_{33}^{1/2} s^{-1/2} [u_k(x_3, \vec{r}, t) - u_k(x_3 + 2\pi/s, \vec{r}, t)] ds + \mu \Delta u_i, \right. \\ \left. \partial u_k / \partial x_k = 0 \right. \quad (16)$$

$$\rho = \rho_w + \rho g \xi - 2\rho \int_0^{\infty} \varphi_{33}^{1/2} s^{-1/2} [u_3(x_3, \vec{r}, t) - u_3(x_3 + 2\pi/s, \vec{r}, t)] ds + \\ + \rho \theta c(k) \partial \xi / \partial t + 2\mu \partial u_3 / \partial x_3, \quad (17)$$

$$\partial \xi / \partial t = -u_3 \text{ при } x_3 = 0, \quad (12')$$

$$\rho \rightarrow 0, u_i \rightarrow 0 \text{ при } x_3 \rightarrow \infty \text{ и } t > 0, i = 1, 2, 3, \quad (13')$$

$$u_i, \rho, \xi = 0 \text{ при } t = 0, i = 1, 2, 3, \quad (14')$$

где  $\varphi_{33}$  — одномерный пространственный спектр энергии поля  $\vec{v}$ , а  $s$  — волновое число турбулентности. Ввиду того что возвышения  $\xi$  малы, здесь можно брать (17) и (12') при  $x_3=0$  вместо  $x_3=\xi$ .

Решение системы ищем в виде интегралов Фурье—Стилтьеса [6]:

$$u_3 = - \int \exp(i\vec{k}\vec{r} - kx_3) d\vec{A}(\vec{k}, t), \quad (18)$$

$$u_j = \frac{ik_j}{k} \int \exp(i\vec{k}\vec{r} - kx_3) d\vec{A}(\vec{k}, t), j = 1, 2, \quad (19)$$

$$\rho(\vec{r}, x_3, t) = \int \exp(i\vec{k}\vec{r} - kx_3) d\rho(\vec{k}, t), \quad (20)$$

$$\xi(\vec{r}, t) = \int \exp(i\vec{k}\vec{r}) dA(\vec{k}, t), \quad (21)$$

где  $\vec{k} = \{k_1, k_2\}$ ,  $k = |\vec{k}|$ ; точкой обозначена производная по времени, а интегрирование производится по всей плоскости волновых векторов  $\vec{k}$ . Уравнения (18)—(21) удовлетворяют уравнению неразрывности (10) и граничному условию (12), а наличие множителя  $\exp(-kx_3)$  в (18)—(20) обеспечивает выполнение краевого условия (13') (затухание с глубиной). Подставив (18)—(21) в (16), с учетом (17) получим уравнение, описывающее эволюцию компонента Фурье—Стилтьеса  $dA(\vec{k}, t)$ :

$$d\ddot{A}(\vec{k}, t) + 2[I(k) + \mu k / \rho + \theta c(k) / 2] k d\dot{A}(\vec{k}, t) + \\ + \omega^2 dA(\vec{k}, t) = -k dP_w(\vec{k}, t) / \rho, \quad (22)$$

где  $dP_w(\vec{k}, t)$  — компонент Фурье—Стилтьеса флуктуаций давления турбулентного ветра  $\rho_w(\vec{r}, t) = \int \exp(i\vec{k}\vec{r}) dP_w(\vec{k}, t)$ ;

$$I(k) = \frac{1}{2} \langle v_3^2 \rangle^{1/2} \int_0^{\infty} \varphi_{33}^{1/2} s^{1/2} [1 - \exp(-2\pi k/s)] ds; \quad (23)$$

$\varphi_{33}$  — нормированный энергетический спектр поля  $\vec{v}$ ;  $\omega = (g/k)^{1/2}$ .

Коэффициент при первой производной в неоднородном линейном дифференциальном уравнении второго порядка (22) определяет развитие волнового процесса с учетом вязкости жидкости, всех видов турбулентности и обратного влияния формы поверхности на распределение давления. Коэффициент гашения волн полем  $\vec{v}$  определяется величиной  $I(k)$ . Интегральный коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$ , входящий в  $\mu$ , может быть выражен через параметры волн по одной из известных формул [4]. Сведения о третьем слагаемом в коэффициенте при первой производной приведены в [2, 3].

При кратковременном действии ветра ( $t < [\theta kc(k)]^{-1}$ ),  $\mu = 0$  и без учета турбулентности второго вида уравнение (22) переходит в (4.1) работы [1]. При  $\mu_t = 0$ , кратковременном действии ветра и отсутствии поля  $\vec{v}$  коэффициент при первой производной в (22), определяющий затухание волнения со временем, в однородном уравнении имеет известный вид  $\mu_m k^2 / \rho$  [7].

Начальные условия для (22) получаются из уравнения (14):

$$d\vec{A}(\vec{k}, t)|_{t=0}, d\vec{A}(\vec{k}, t)|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

Решение уравнения (22), полученное по принципу суперпозиции сверткой откликов линейной системы, описываемой этим уравнением, на единичные импульсы с амплитудами  $-kdP_w \delta(t-t_0) / \rho$  (где  $\delta(t-t_0)$  — дельта-функция Дирака) в форме интеграла Дюамеля при начальных условиях (24) имеет вид

$$d\vec{A}(\vec{k}, t) = \frac{k}{\rho \omega_1} \int_0^t e^{\delta(\tau-t)} dP_w(\vec{k}, \tau) \sin(\omega_1 \tau - \varphi) d\tau, \quad (25)$$

где  $\delta$  и  $\omega_1$  — соответственно действительные и мнимые части комплексно-сопряженных корней  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  характеристического уравнения, соответствующего (22);  $\varphi = \omega t$ .

При радиофизических наблюдениях [8] основной характеристикой зон погашенного волнения является их контраст по отношению к окружающему фону. В качестве характеристики контраста может быть использована величина

$$K = \frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0} = 1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (26)$$

где  $\Phi(\vec{k}, t)$  и  $\Phi_0(\vec{k}, t)$  — спектры волн в зоне погашенного волнения и вне ее.

Через компоненты Фурье—Стилтьеса (25) функции  $\Phi$  и  $\Phi_0$  могут быть вычислены [6] по формуле

$$\Phi = \left\langle \frac{d\vec{A}(\vec{k}, t) d\vec{A}^*(\vec{k}, t)}{dk_1 dk_2} \right\rangle. \quad (27)$$

Подставляя (25) в (27), получим

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}, t) = & \frac{k^2}{4\rho^2 \omega_1^2} \left\{ \frac{1 - \exp[(\Lambda_1 + \Lambda_2)t]}{\delta} \int_0^\infty \left\langle \frac{dP_w(\vec{k}, t) dP_w^*(\vec{k}, t + \tau)}{dk_1 dk_2} \right\rangle \cos \omega_1 \tau d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{\text{Re}(\Lambda_1 \exp(2\Lambda_2 t)) - \delta}{\Lambda_1 \Lambda_2} \int_{-t}^t \left\langle \frac{dP_w(\vec{k}, t) dP_w^*(\vec{k}, t + \tau)}{dk_1 dk_2} \right\rangle d\tau. \right. \end{aligned} \quad (28)$$



При  $t \gg \rho_\tau(\vec{k})$ , где  $\rho_\tau(\vec{k})$  — интервал корреляции компонентов давления с волновым вектором  $\vec{k}$  [6],

$$\Phi \approx \frac{k^2}{4\rho^2\omega_1^2\delta^2} \Pi_1(\vec{k}, t), \quad (29)$$

где

$$\Pi_1(\vec{k}, \omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dP_\omega(\vec{k}, t) dP_\omega^*(\vec{k}, t + \tau)}{dk_1 dk_2} \right\rangle \cos \omega_1 \tau dt \quad (30)$$

пространственно-временной спектр флуктуаций давления [6].

Расчет  $\Phi(\vec{k})$  по формуле (29) производится методом последовательных приближений, что отражает сущность физического процесса развития волн на турбулированной жидкости.

При выполнении условия (8) для турбулентности второго вида и  $t \gg \rho_\tau(\vec{k})$

$$\Phi_0(\vec{k}) \approx \frac{k^2}{4\rho^2\omega_0^2\delta^2} \Pi_1(\vec{k}, \omega_0), \quad (31)$$

где

$$I_0(k) = \frac{1}{2} \langle v_{3e}^2 \rangle^{1/2} \int_0^\infty \Phi_{33}^{1/2} s^{-1/2} [1 - \exp(-2\pi k/s)] ds; \quad (32)$$

$$\omega_0 = [\omega^2 - \delta_0^2]^{1/2}; \quad \delta_0 = k [I_0(k) + \mu k/\rho + \theta c(k)/2]/2; \quad (33)$$

$\langle v_{3e}^2 \rangle$  и  $\Phi_{33}$  — интенсивность и одномерный нормированный спектр вертикальной составляющей поля скоростей турбулентности второго вида. Если условие (8) для турбулентности второго вида не выполняется, то вывод формулы (31) оказывается некорректным. Поэтому поступим следующим образом.

Рассмотрим случай  $\vec{v} \neq 0$ . Тогда для линеаризации (1) и (3) достаточно, чтобы в приближении теории волн малой амплитуды они переходили в уравнения

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i, \quad (1')$$

$$p_\omega = p - \rho g \eta - \theta c(k) \partial \eta / \partial t - 2\mu \partial v_3 / \partial x_3 \text{ при } x_3 = 0. \quad (3')$$

Заменяя в системе (1)–(6) (3) на (1') и (3') и подставляя решение в виде (18)–(21), получаем уравнение для амплитуд Фурье—Стилтьеса  $dA$  при  $\vec{v} = 0$ :

$$d\ddot{A}(\vec{k}, t) + 2[\mu k/\rho + \theta c(k)/2] k d\dot{A}(\vec{k}, t) + \omega^2 dA(\vec{k}, t) = -k dP_\omega(\vec{k}, t)/\rho \quad (22')$$

Уравнение (22) переходит в (22') при  $\langle v_{3e}^2 \rangle \rightarrow 0$ . Это дает основание полагать, что уравнение (22) и, следовательно, формулы (29), (31) справедливы при любой интенсивности поля  $\vec{v}$ .

Вычисленные методом последовательных приближений по формулам (29), (31) значения  $\Phi$  и  $\Phi_0$  после подстановки в (26) позволяют определить контрастность зон погашенного волнения по отношению к окружающему фону. Величина контраста зависит от степени гашения волнения и соотношения спектров случайного поля флуктуаций давления на поверхности воды над фоном и зоной погашенного волнения. Вследствие монотонного уменьшения степени гашения воды с увеличением их длины  $\lambda$  и колоколообразного вида спектров поля флуктуаций давления [4] кривая зависимости  $K$  от  $\lambda$  и, следовательно, от несущей частоты РЛС имеет экстремум. Кроме того,  $K$  зависит от ориентации луча РЛС по отношению к фронту морского волнения и максимизируется еще и по этому параметру.

В окончательной редакции настоящей статьи учтены замечания С. В. Доброклонского, которому авторы выражают свою признательность за внимание к работе и советы при проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боев А. Г. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 7, № 1, 1971.
2. Miles J. W. J. Fluid Mech., 3, 185—204, 1957.
3. Miles J. W. J. Fluid Mech., 7, 469—478, 1960.
4. Кононкова Г. Е. Динамика морских волн. Изд-во МГУ, 1969.
5. Вен С. К. В сб.: «Ветровые волны». М., 1962.
6. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., 1969.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1953.
8. Замаараев Б. Д., Калмыков А. И. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 5, № 1, 1969.

Поступила в редакцию  
12.11 1971 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши