Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1973

УДК 525.11 : 525.223

Л. А. САВРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ВЫРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА ЧЕРЕЗ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

В статье рассмотрено распределение нормального поля силы тяжести в зависимости от эллипсоидальных координат и функций, найдены выражения параметров земного трехосного эллипсоида в зависимости от коэффициентов разложения силы тяжести в ряд по эллипсоидальным функциям.

Распределение силы тяжести на уровенном трехосном эллипсоиде выражается известной формулой Минео [1]

$$\gamma = \frac{(a\gamma_a \cos^2\lambda + b\gamma_b \sin^2\lambda)\cos^2\varphi + c\gamma_c \sin^2\varphi}{\sqrt{(a^2\cos\lambda + b^2\sin^2\lambda)\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}}, \tag{1}$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида γ_a, γ_b, γ_c —сила тяжести на концах полуосей, φ, λ — широта и долгота.

Поставим задачу выражения распределения силы тяжести на эллипсоиде в эллипсоидальных координатах. Имея в виду, что

$$c = a(1-\alpha), \quad \gamma_c = \gamma_a(1+\beta),$$
$$b = a(1-\alpha'), \quad \gamma_b = \gamma_a(1+\beta')$$

(где α и β — полярное сжатие и отношение разности силы тяжести на концах полуосей c и a к силе тяжести γ_a, α' и β' — сжатие экватора и отношение разности силы тяжести на концах полуосей b и c к силе тяжести γ_a), а также используя связь эллипсоидальных координат μ, ν на эллипсоиде со сферическими угловыми координатами φ, λ

$$\cos^2\varphi = \frac{\mu^2\nu^2}{k^2h^2}, \quad \cos^2\lambda = \frac{k^2(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}{(k^2-h^2)(k^2h^2-\mu^2\nu^2)},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{k^2h^2-\mu^2\nu^2}{k^2h^2}, \quad \sin^2\lambda = \frac{h^2(k^2-\mu^2)(k^2-\nu^2)}{(k^2-h^2)(k^2h-\mu^2\nu^2)}$$

(где k, h — некоторые постоянные, характеризующие размеры эллипсоида), можно написать разложение γ в эллипсоидальных координатах μ, ν по степеням малых величин α, β, α', β'. Известно, что порядок малости α и β одинаков ($^1/_{300}$), а α' и β' относительно них представляют собой члены второго порядка малости

$$\gamma(\mu, \nu) = \gamma_a \Big\{1 + \beta \frac{k^2h^2 - \mu^2\nu^2}{k^2h^2} - \alpha\beta \frac{k^2h^2 - \mu^2\nu^2}{k^2h^2} +$$

$$+ \alpha^2 \frac{k^2h^2 - \mu^2\nu^2}{k^2h^2} - \beta' \frac{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}{k^2(k^2 - h^2)} +$$

$$+ 2\alpha' \frac{\mu^2(k^2 - \mu^2)\nu^2(k^2 - \nu^2)}{k^2(k^2 - h^2)(k^2h^2 - \mu^2\nu^2)} + \ldots\Big\}. \qquad (2)$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости относительно α и β, можно переписать это разложение в виде:

$$\gamma(\mu, \nu) = \bar{\gamma}_a \Big\{1 + \frac{\beta - \alpha\beta + \alpha^2}{k^2h^2(1 + \beta - \alpha\beta - \alpha^2)} F_1(\mu, \nu) +$$

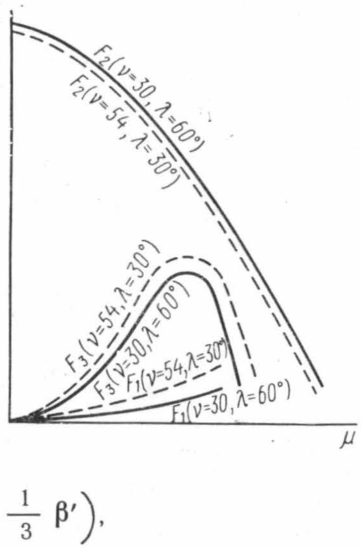
$$+ \frac{\beta'}{k^2(k^2 - h^2)(1 + \beta - \alpha\beta - \alpha^2)} F_2(\mu, \nu) + \frac{2\alpha'}{k^2(k^2 - h^2)(1 + \beta - \alpha\beta - \alpha^2)} F_3(\mu, \nu)\Big\}, \qquad (3)$$

где

$$\bar{\gamma}_a = \gamma_a(1 + \beta - \alpha\beta - \alpha^2), \quad F_1(\mu, \nu) = \mu^2\nu^2,$$

$$F_2(\mu, \nu) = (k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2), \quad F_3(\mu, \nu) = \frac{\mu^2\nu^2(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}{k^2h^2 - \mu^2\nu^2}.$$

Таким образом, формула (3) с точностью до членов второго порядка полярного сжатия выражает распределение силы тяжести на уровенном трехосном эллипсоиде в системе эллипсоидальных координат. На рисунке приведены графики качественных изменений функций F_1, F_2, F_3 для значений $k^2 = 648\,600$, $h^2 = 3812$ и фиксированных ν.



Выразим параметры земного эллипсоида через коэффициенты разложения гравитационного поля в ряд по функциям Ламе. Это можно сделать, используя уже известную связь коэффициентов разложения по сферическим функциям с параметрами эллипсоида. В частности, И. Д. Жонголовичем было получено [2]:

$$a_{00} = \gamma_a\left(1 + \frac{1}{3}\beta - \frac{8}{15}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta'\right),$$

$$a_{20} = \gamma_a\left(\frac{2}{3}\beta - \frac{8}{21}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta'\right),$$

$$a_{40} = \gamma_a \frac{32}{35}\beta_1,$$

$$a_{22} = \gamma_a \frac{1}{6}\beta' \cos 2\lambda_0,$$

$$b_{22} = \gamma_a \frac{1}{6}\beta' \sin 2\lambda_0, \quad \beta_1 = \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2,$$

где a_{00}, a_{20} — коэффициенты функций Лежандра в разложении силы тяжести с точностью до квадрата, полярного сжатия

$$\gamma(\varphi, \lambda) = a_{00} + a_{20}p_{20}(\varphi) + a_{40}p_{40}(\varphi) + \\ + (a_{22}\cos 2\lambda + b_{22}\sin 2\lambda)\, p_{22}(\varphi). \qquad (4)$$

Далее используем связь между сферическими полиномами Ленжандра p_{20}, p_{40}, p_{22} и т. д. и эллипсоидальными функциями четырех типов $E_{nm}(\mu)$, $E_{nm}(\gamma)$ и их произведениями [3, 4]:

$$p_{20} = \sum_{m=1}^{2} \varkappa_{2m}K_{2m}(\mu)\,K_{2m}(\nu), \quad p_{40} = \sum_{m=1}^{3} \varkappa_{4m}K_{4m}(\mu)\,K_{4m}(\nu),$$

$$p_{22}\cos 2\lambda = \sum_{m=1}^{2} \varkappa_{2m}K_{2m}(\mu)\,K_{2m}(\nu), \quad p_{22}\sin 2\lambda = \sum_{m=1}^{1} \delta_{2m}N_{2m}(\mu)\,N_{2m}(\nu).$$

Подставим в формулу (4) вместо полиномов Лежандра их выражения через произведения эллипсоидальных функций. Получим

$$\gamma = A_{00} + A_{21}K_{21}(\mu)\,K_{21}(\nu) + A_{22}K_{22}(\mu)\,K_{22}(\nu) + \\ + A_{41}K_{41}(\mu)\,K_{41}(\nu) + A_{42}K_{42}(\mu)\,K_{42}(\nu) + A_{43}K_{43}(\mu)\,K_{43}(\nu) + \\ + \bar{A}_{21}K_{21}(\mu)\,K_{21}(\nu) + \bar{A}_{22}K_{22}(\mu)\,K_{22}(\nu) + \tilde{A}_{21}N_{21}(\mu)\,N_{21}(\nu) + \ldots, \qquad (5)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$A_{00} = \gamma_a\left(1 + \frac{1}{3}\beta - \frac{8}{15}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta'\right),$$

$$A_{21} = \gamma_a\left(\frac{2}{3}\beta - \frac{8}{21}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta'\right)\varkappa_{21}, \qquad (5')$$

$$A_{22} = \gamma_a\left(\frac{2}{3}\beta - \frac{8}{21}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta'\right)\varkappa_{22},$$

$$A_{41} = \gamma_a\beta_1\frac{32}{35}\varkappa_{41}, \quad A_{42} = \gamma_a\beta_1\frac{32}{35}\varkappa_{42}, \quad A_{43} = \gamma_a\beta_1\frac{32}{35}\varkappa_{43},$$

$$\bar{A}_{21} = \gamma_a\frac{1}{6}\beta'\varkappa_{21}\cos 2\lambda_0,$$

$$\bar{A}_{22} = \gamma_a\frac{1}{6}\beta'\varkappa_{22}\cos 2\lambda_0, \quad \tilde{A}_{21} = \gamma_a\frac{1}{6}\beta'\delta_{21}\sin 2\lambda_0,$$

Эта формула с точностью до третьего порядка сжатия представляет распределение силы тяжести на эллипсоиде через произведения эллипсоидальных функций, в которых имеющиеся коэффициенты A_{00}, ..., A_{nm} ($n=0, 1, 2, ..., \infty$; $m=0, 1, 2, ..., 2n+1$) произвольны. Сравнивая (5′) с формулой разложения силы тяжести по эллипсоидальным функциям, где коэффициенты известны [5], видим, что для соответствия нужно положить

$$A_{00} = B_{00}, \quad \frac{A_{21}}{\varkappa_{21}} = B_{21}, \quad \frac{A_{41}}{\varkappa_{41}} = B_{41}, \ldots$$

Пользуясь известными численными коэффициентами разложения (5), получим

$$\gamma = B_{00} + 2B_{21}K_{21}(\mu)K_{21}(\nu) + 2B_{22}K_{22}(\mu)K_{22}(\nu) + B_{41}K_{41}(\mu)K_{41}(\nu) + $$
$$+ B_{42}K_{42}(\mu)K_{42}(\nu) + B_{43}K_{43}(\mu)K_{43}(\nu) + \widetilde{B}_{21}N_{21}(\mu)N_{21}(\nu). \qquad (6)$$

Итак, искомые параметры земного эллипсоида можно получить из численных коэффициентов разложения силы тяжести в ряды по эллипсоидальным функциям:

$$\gamma_a = B_{00} - \frac{1}{2}B_{21} + \frac{3}{8}B_{41} + 3\sqrt{B_{21}^2 + \widetilde{B}_{21}^2},$$
$$\gamma_a\beta = \frac{3}{2}B_{21} + \frac{5}{8}B_{41} - 3\sqrt{B_{21}^2 + \widetilde{B}_{21}^2}, \qquad (7)$$
$$\gamma_a\beta_1 = \frac{35}{32}B_{41}, \ \gamma_a\beta' = 6\sqrt{B_{21}^2 + \widetilde{B}_{21}^2},$$
$$\alpha' = \frac{\beta'}{1 - \frac{19}{7}q}, \ \alpha = \frac{\frac{5}{2}q - \beta + \frac{5}{7}q\alpha'}{1 + \frac{17}{14}q},$$
$$q = \frac{\omega^2 a}{\gamma a}.$$

Долгота λ_0 наибольшей полуоси экватора a вычисляется по формуле $\mathrm{tg}\,2\lambda_0 = B_{21}/\widetilde{B}_{21}$, а сила тяжести γ_b на конце малой полуоси b экватора и полюсная сила тяжести γ_c по формулам

$$\gamma_b = \gamma_a(1 - \beta') = B_{00} - \frac{1}{2}B_{21} + \frac{3}{8}B_{41} - 3\sqrt{B_{21}^2 + \widetilde{B}_{21}^2}, \qquad (8)$$
$$\gamma_c = \gamma_a(1 + \beta) = B_{00} + B_{21} + B_{41}.$$

Массу Земли можно определить по формулам Пицетти

$$\frac{\gamma_a}{a} + \frac{\gamma_b}{b} + \frac{\gamma_c}{c} = \frac{3fM}{abc} - 2\omega^2$$

или Жонголовича

$$fM = \gamma_a a^2(1 - \alpha - \alpha' + \alpha\alpha') + \frac{3}{2}\omega^2 a^3\left(1 - \frac{5}{7}\alpha - \frac{5}{21}\alpha' + \ldots\right),$$

где M — масса Земли, ω — угловая скорость вращения Земли, a — большая полуось экватора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mineo C. Boll. d. Unione Mat. Ital., Anno, **7**, No. 2, 1928.
2. Жонголович И. Д. В трудах Института теоретической астрономии АН СССР, вып. 3, 1952.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., 1968.
4. Савров Л. А., Сагитов М. У. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **11**, № 2, 1971.
5. Савров Л. А. Труды ГАИШ, **13**, 1971.

Поступила в редакцию
19.11 1971 г.

ГАИШ