Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1973

УДК 621.373

Ю. М. АЗЬЯН, А. С. МКРТУМОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЧАСТОТНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В квазилинейном приближении анализируется конкуренция несинхронных мод в зависимости от характера нелинейности усилителя. Для определенного класса нелинейностей показана устойчивость одночастотных колебаний при отсутствии в системе дисперсии потерь, которая сужает области устойчивости. Полученные результаты применимы также к системам с резонансной обратной связью.

Изучаемый генератор является автоколебательной системой с широкополосной обратной связью. Отличительной особенностью систем этого типа является то, что именно запаздывание сигнала в цепи обратной связи служит причиной возникновения автоколебаний. Блок-схема таких систем показана на рис. 1 (I — нелинейный усилитель, II — линейная цепь обратной связи). Задача о параметрах стационарных колебаний в таком устройстве была решена [1] для случая отсутствия дисперсии в цепи обратной связи (τ задержки — const). Решение показало возможность автоколебаний с периодом 2τ, форма и частота которых не зависели от коэффициента усиления усилителя. Разложение колебаний в ряд Фурье показывало, что для всех его гармонических составляющих выполнялось условие баланса фаз: при прохождении гармонического колебания такой частоты через разомкнутую систему сдвиг по фазе равен $2\pi k$.

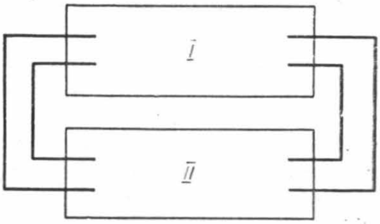

Рис. 1

Чтобы выяснить, к чему приведет наличие дисперсии, авторы [2] рассмотрели систему с LC-цепочкой в качестве цепи обратной связи. Эта система и будет рассматриваться в данной работе.

Если система, находившаяся в состоянии покоя, в момент времени $t=0$ подверглась действию начального толчка в виде ступени напряжения, то

$$u(t) - u_0 1(t) = \int_0^t f[u(\xi)]\, h_\delta(t-\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $u(t)$ — напряжение на входе усилителя, $1(t)$ — единичная ступень, $f(u)$ — нелинейная зависимость напряжения на выходе усилителя от напряжения на его входе и $h_\delta(t)$ — реакция линии на скачок напряжения на ее входе в виде δ-функции.

В работе [2] было получено решение для случая линейности $f(u)$, что соответствует мягкому режиму возбуждения автоколебаний. Решение показало, что при коэффициенте усиления, большем 1, должен возникнуть нарастающий колебательный процесс вида

$$\sum_n [a_n(t) \cos \omega_n t + b_n(t) \sin \omega_n t], \tag{2}$$

где $a_n(t)$ и $b_n(t)$ — монотонно возрастающие функции времени, скорость роста которых падает с повышением номера; ω_n близки к частотам, для которых выполняются условия баланса фаз. Неэквидистантность ω_n и различие в скоростях роста для разных n являются следствиями дисперсии. Было также отмечено, что потери, имеющиеся в реальных линиях, возрастают при росте частоты.

Эксперимент показал, что при мягком возбуждении стационарный процесс формируется из колебательного компонента низшего номера и состоит из основной гармоники, соответствующей частоте этого компонента и ее побочных гармоник, вызванных нелинейностью усилителя. Остальные же компоненты, имеющие худшие условия возбуждения и меньшую скорость нарастания, затухают с течением времени. Это получило следующее качественное объяснение. Колебание низшей частоты, растущее быстрее прочих, первым заходит в нелинейную область характеристики усилителя, снижает среднюю крутизну для остальных возбужденных компонентов и подавляет их.

Было высказано предположение, что если специфической формой начального толчка увеличить в начальном распределении амплитуд удельный вес компонента высшей частоты так, чтобы он первым зашел в нелинейность, то он также погасит все прочие колебания и обеспечит существование автоколебаний с этой частотой. Это предположение, подтвержденное экспериментально, показывало возможность использования системы в качестве многопозиционного устройства.

Однако экспериментальное исследование зависимости характеристик стационарного движения от параметров системы подтвердило, что в системе существуют не только одночастотные движения (т. е. периодические, в спектре которых доминирует один из возможных компонентов возбуждения, а все прочие составляющие процесса являются его высшими гармониками), но и периодические с иным распределением амплитуд по частотам, а также непериодические движения. При изменении коэффициента усиления происходили самые разнообразные изменения типов стационарного движения. Механизм этих изменений оставался неясен; не ясно также, сколько одночастотных движений может быть возбуждено и каковы будут области их устойчивости. Попытки прямого решения уравнения (1) были неудачны из-за больших математических трудностей.

Таким образом, из экспериментальных исследований можно заключить, что в рассматриваемой системе, потенциально многочастотной, проблема конкуренции между модами колебаний представляется весьма важной для понимания возможных стационарных движений, в частности одночастотных. Необходимо изучение того, как зависят от характера нелинейности условия мягкого возбуждения иных мод колебаний в присутствии стационарного одночастотного процесса, порожденного определенной модой. В этом плане наша задача непосредственно связана с проблемой устойчивости в многочастотных автоколебательных системах.

В процессе конкуренции между разными модами колебаний мыслимы как асинхронные, так и синхронные взаимодействия между ними. А так как в случае несинхронности колебания не имеют фиксированной или хотя бы медленно меняющейся разности фаз, то результат взаимодействия, осуществляющегося на нелинейности, не зависит от фазочастотных свойств задающего дисперсию элемента и определяется характером нелинейности. Взаимодействие при этом зависит от амплитуд колебаний, но не зависит от их частот, и влияет непосредственно на энергетические условия регенерации мод.

В данной работе устойчивость одночастотных движений рассматривается именно в предположении асинхронности взаимодействия мод, что позволяет подойти к системе с точки зрения амплитудного баланса.

1. При анализе используем метод гармонической линеаризации для случая асинхронного внешнего воздействия на автоколебательную систему [3]. Существующий автоколебательный процесс будем рассматривать как внешний сигнал для остальных возможных частот возбуждения. Стационарный процесс будем считать почти гармоническим. Для автоколебаний на частоте большей $\omega_0/2=1/\sqrt{LC}$, условие квазигармоничности выполняется при любых коэффициентах усиления.

Условие мягкости возбуждения допускает линеаризацию задачи для возбуждающихся колебаний, таким образом вопрос об устойчивости состояния покоя совокупности возможных колебательных компонентов разбивается на независимые задачи об устойчивости системы по каждому из этих компонентов.

Предположим, что в системе наряду со стационарным колебанием частоты ω_n возникло малое колебание частоты ω_i. Тогда [3] устойчивость исходного процесса (т. е. затухание ω_i) обеспечивается неравенством

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x=a\sin\omega_n t} d(\omega_n t) < 1, \tag{3}$$

где $f(x)$ — характеристика нелинейного усилителя, взятая для удобства с обратным знаком, т. е. с положительным коэффициентом усиления; $a\sin\omega_n t$ — стационарное колебание. Его амплитуда в свою очередь определяется уравнением

$$\frac{1}{\pi a}\int\limits_0^{2\pi} f(a\sin\omega_n t)\sin\omega_n t d(\omega_n t) = 1. \tag{4}$$

Совокупность этих соотношений и определяет устойчивость $a\sin\omega_n t$ как функцию параметров системы. Для определенного класса характеристик задача имеет общее решение.

Пусть характеристика имеет свойства:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = -f(-x) & f'(\infty) < f'(0) \\ 0 < f'(0) < \infty & f''(x)|_{x\geqslant 0} \leqslant 0 \end{matrix}\right\}. \tag{$*$}$$

В дальнейшем для краткости будем говорить о характеристиках типа ($*$).

Так как

$$\frac{1}{\pi a}\int\limits_0^{2\pi} f(a\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi a}\int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} a\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

то (4) сводится к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} \cos^2\varphi\,d\varphi = 1.$$

Вычитая (3) из (4), получим условие устойчивости

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} d\varphi > 0. \tag{5}$$

Легко показать графически, что для характеристики типа $(\ast)$ оно всегда выполняется (рис. 2). Интеграл в (5) можно в этом случае брать от 0 до π. Так как df/dx уменьшается к $\varphi=\pi/2$, то интеграл в (5) будет положительным.

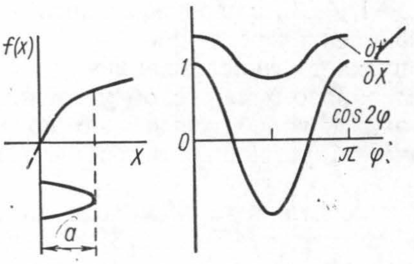

Рис. 2

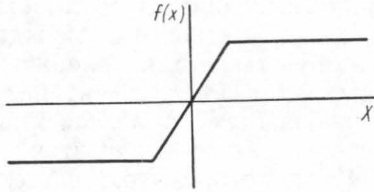

Рис. 3

Использование метода [3] позволяет учитывать неравномерность амплитудно-частотной характеристики коэффициента передачи цепи обратной связи. Пусть модуль коэффициента передачи цепи обратной связи будет равен не 1, а $K(\omega)$. Если разомкнуть систему, например на входе нелинейного элемента, и подать на этот вход колебание $\sum\limits_n a_n \sin\omega_n t$, состоящее из любого набора гармоник с произвольными амплитудами, то амплитуды этих гармоник на выходе системы (а следовательно, и значения средней крутизны для них) станут в $K(\omega_n)$ раз больше, чем в случае $K(\omega)=1$. Представим $K(\omega)$ в виде $K\eta(\omega)$ и для простоты сделаем, сохраняя при этом вид нелинейности, перенормировку:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = 1, \quad \eta_{\max} = 1,$$

где $\eta_{\max}$ выбирается из $\eta(\omega_i)$; ω_i — возможные частоты генерации; $f(x)$ и $\eta(\omega)$ — свойства системы; K — изменяемый параметр (коэффициент усиления). При такой нормировке система неспособна генерировать при $K<1$, а при превышении этого порога возбуждается та из возможных частот генерации, для которой η максимально. Обозначив $\eta(\omega_n)=\eta_n$, $K\eta(\omega_n)=K_n$ (для установившейся моды) и $\eta(\omega_i)=\eta_i$, $K\eta(\omega_i)=K_i$ (для возбуждающейся), получим из (3) и (4) систему

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n \cos^2\varphi \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} d\varphi = 1, \\
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_i \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} d\varphi < 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

или, вычитая и сокращая на K:

$$
\int_0^{2\pi} [2\eta_n \cos^2\varphi - \eta_i] \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=a\sin\varphi} d\varphi > 0. \tag{7}
$$

Для характеристик типа (✻) неравенство (7) позволяет сделать несколько выводов общего характера.

При $\eta_n \geqslant \eta_i$ устойчивость обеспечена. Поэтому далее подразумевается, что $\eta_n < \eta_i$.

Существует такое положительное $\varepsilon_{in} = \varepsilon\left(f, \frac{\eta_n}{\eta_i}\right)$, что при $K_n < 1 + \varepsilon_{in}$ одночастотное движение частоты ω_n невозможно, так как будет возбуждаться ω_i. Поскольку сáмой конкурентоспособной в этом смысле является самая активная из ω_i, для которой $\eta = 1$, то для устойчивости колебания с частотой ω_n необходимо условие: $K_n > 1 + \varepsilon(f, \eta_n)$. Таким образом превышение K над 1 должно не только довести ω_n до порога генерации ($K\eta_n \equiv K_n = 1$), но и создать «запас сил» для подавления остальных мод, который и характеризуется числом ε.

Если $f'(x) \geqslant 0$, то в системе неустойчиво одночастотное колебание с частотой ω_n, для которой $\eta_n < \frac{1}{2}$.

Такое колебание ни при каких K не сможет подавить самую активную частоту системы.

Графически эти выводы легко получить из (7) сдвигом на рис. 2 функции $\cos 2\varphi$ вниз на $(\eta_i/\eta_n - 1)$.

В экспериментальной части работы изучались стационарные одночастотные процессы при заданном характере нелинейности усилителя. Моделировалась характеристика, изображенная на рис. 3. Достигнутая степень симметрии характеризуется тем, что амплитуда второй гармоники в режиме генерации не превышала $5 \cdot 10^{-3}$ от амплитуды основной. LC-цепочка имела 18 звеньев. В системе существовали 6 одночастотных движений, относительно количества, параметров и областей устойчивости которых все полученные выше выводы подтвердились в пределах точности эксперимента. Коэффициент усиления в ходе эксперимента изменялся от 1 до 3,8.

Предположение, что нарушение симметрии характеристики может быть причиной существования непериодических движений, проверявшееся путем искусственного смещения рабочей точки, подтвердилось. В отсутствие смещения никакие формы воздействия не приводили к установлению непериодических движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бовшеверов В. М. ЖТФ, **6**, вып. 9, 1936.
2. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», **1**, вып. 4, 1956.
3. Кобзарев Ю. Б. ЖТФ, **3**, вып. 2, 1933.
4. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. ЖТФ, **4**, вып. 1, 1934.

Поступила в редакцию
30.11 1971 г.

Кафедра
физики колебаний