

Э. П. МАЙКОВА

**РАСЧЕТ УСТОЙЧИВЫХ ДИСЛОКАЦИОННЫХ КОЛЕЦ,  
ОБРАЗУЮЩИХСЯ ВБЛИЗИ ПРЕЦИПИТАТОВ  
ИЛИ ВКЛЮЧЕНИЙ**

Предложена простая методика определения положения и размеров равновесных дислокационных колец, образующихся вблизи преципитатов или включений. При этом предполагается, что кольцо является окружностью. Показано, что при использовании этой методики отклонение точек получающегося кольца от точного решения интегро-дифференциального уравнения равновесия, составляет 5—10% диаметра кольца.

Вблизи преципитатов и включений, например, при движении дислокаций под действием внешней силы или в процессе закалки могут возникать устойчивые дислокационные кольца [1, 2]. Эти кольца приводят к возрастанию сопротивления движению последующих дислокаций и к деформационному упрочению [3—5]. Поэтому представляет интерес исследовать условия образования колец и зависимость их размеров и положений от различных параметров. Эти кольца с большой точностью могут быть найдены численным интегрированием интегродифференциальных уравнений движения дислокаций. Один из возможных способов решения этих уравнений предлагался в работе [6]. Однако нахождение дислокационных колец как предельных положенийдвигающихся дислокаций весьма трудоемко. Для их нахождения достаточно решить уравнение равновесия (см. уравнение (1)), которое несколько проще, хотя и остается интегродифференциальным. В настоящей работе предлагается простой метод приближенного решения уравнения равновесия.

В дальнейшем для определенности будем говорить о когерентном преципитате. Разница в модулях сдвига среды и преципитата не учитывается. Описанный метод решения полностью переносится на случай других включений, создающих в матрице такие же напряжения, как в формуле (2). Сюда относятся, например, сплавы с включениями, около которых в результате закалки создаются упругие напряжения вида (2) (см. [2]).

**Постановка задачи.** Будем считать, что когерентный шаровой преципитат радиуса  $r_0$  расположен в начале координат, а дислокационное кольцо с вектором Бюргера  $\vec{b}$ , параллельным оси  $y$ , лежит в плоскости скольжения  $z = z_0$ . Кольцо, положение которого нужно определить, находится в равновесии под действием силы, создаваемой преципита-

том, внешней силы, силы самодействия и силы сопротивления движению дислокаций (силы трения среды), т. е. в каждой точке  $N$  дислокационного кольца удовлетворяется уравнение равновесия<sup>1</sup>:

$$\sigma^P(N) + \sigma^S(N) + \sigma^0 = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma^P(N) = - \frac{6G \varepsilon r_0^3 y z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (2)$$

— напряжение, создаваемое преципитатом в точке  $N$ ;  $G$  — модуль сдвига среды и преципитата;  $\varepsilon$  — параметр несоответствия [7]. Далее, напряжение самодействия [8] в точке  $N$  равно

$$\sigma^S(N) = \frac{Gb}{4\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{\rho} \left[ (1 + \nu - 3\nu \sin^2 \alpha) \ln \frac{2\lambda}{r_i} + 3\nu \sin^2 \alpha - 1 \right] + \frac{Gb}{4\pi(1-\nu)} \int_{D_\lambda} (1 + \nu - 3\nu \sin^2 \beta) \frac{d\beta}{R}, \quad (3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho$  — радиус кривизны дислокации  $D$  в точке  $N$ ;  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{b}$  и касательной к линии дислокации;  $\beta$  — угол между вектором  $\vec{b}$  и вектором  $\vec{R}$ , проведенным из точки  $N$  в точку интегрирования;  $r_i$  — радиус ядра дислокации;  $D_\lambda$  — дислокационная линия, из которой выброшены точки, отстоящие от  $N$  меньше, чем на  $\lambda$ . Наконец,  $\sigma^0$  — сумма внешнего напряжения  $\sigma^e$  и напряжения трения среды  $\sigma^f$ :

$$\sigma^0 = \sigma^E - \sigma^f \cdot \text{sign}(\sigma^E + \sigma^P + \sigma^S). \quad (4)$$

**Обоснование метода.** Уравнение (1) можно решить численно методом, сходным с описанным в [6]. На рис. 1 пунктиром изображено равновесное дислокационное кольцо около преципитата, найденное этим способом при следующих значениях параметров:  $b = 3 \text{ \AA}$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $r_0 = 150 \text{ \AA}$ ,  $\sigma^0 = 0$ ,  $z_0 = +175 \text{ \AA}$ . Из рисунка можно видеть, что форма равновесного кольца близка к круговой. Это дает основание при приближенных расчетах полагать, что образующееся равновесное кольцо является точной окружностью. В этом случае для нахождения кольца достаточно определить точки  $A$  и  $B$  его пересечения с осью  $y$ . Заметим, что в плоскостях, пересекающих преципитат ( $|z_0| < r_0$ ), форма кольца может существенно отличаться от круговой за счет особенностей движения дислокации в преципитате, за счет сил изображения и т. п. Впрочем, в работе [6] было показано, что при некоторых упрощающих предположениях конфигурация дислокации вне преципитата практически не зависит от поведения

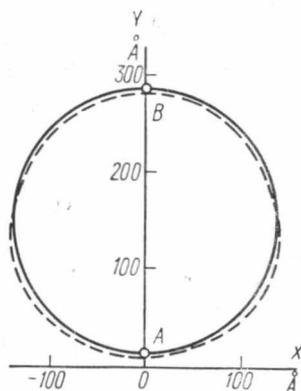


Рис. 1. Устойчивое равновесное кольцо. Сплошная линия — круговое приближение, пунктирная — точная конфигурация

<sup>1</sup> Поскольку при выбранном векторе  $\vec{b}$  силы, действующие на дислокацию, определяются лишь компонентом  $\sigma_{yz}$  тензора напряжений, индексы  $y, z$  опускаются.

дислокации на границе и внутри преципитата. Это позволяет распространить метод на случай  $|z_0| < r_0$ .

**Методика решения.** Перейдем в уравнении (1) к безразмерным величинам  $\tau^P = \frac{\sigma^P}{G}$ ,  $\tau^S = \frac{\sigma^S}{G}$ ,  $\tau^0 = \frac{\sigma^0}{G}$ . Получим

$$\tau^P + \tau^S + \tau^0 = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим функцию  $\tau^P(0, y, z_0)$ . Пусть  $M$  — максимальное значение абсолютной величины  $\tau^P$  на прямой  $z=z_0, x=0$ . Легко показать, что

$$M = \frac{6\varepsilon}{25\sqrt{5}/16} \cdot \frac{r_0^3}{z_0^3}. \quad \text{Запишем } \tau^P \text{ в виде}$$

$$\tau^P(0, y, z_0) = -M \frac{25\sqrt{5}/16 \eta}{(\eta^2 + 1)^{5/2}} = \tau^P(\eta),$$

где

$$\eta = y/z_0. \quad (6)$$

Очевидно, равновесное кольцо располагается там, где  $\tau^P$  имеет отрицательные значения, т. е. при  $\eta > 0$ . Построим для  $\eta \geq 0$  график функции  $T(\eta) = -\frac{\tau^P(\eta)}{M}$  (см. рис. 2) и отметим некоторые ее свойства. График  $T(\eta)$  проходит через начало координат плоскости  $(\eta, T)$ . Функция  $T(\eta)$  возрастает на отрезке  $[0, 1/2]$  и убывает при  $\eta > 1/2$ , достигая своего

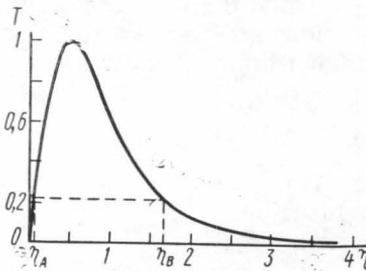


Рис. 2. График функции  $T(\eta)$

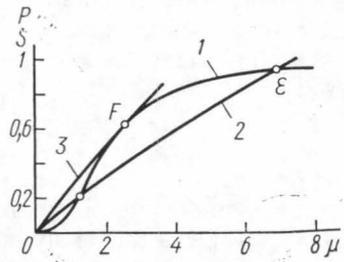


Рис. 3. Графики функций  $P(\mu)$  (кривая 1) и  $S(\mu)$  (кривые 2 и 3)

максимального значения, равного 1, при  $\eta = 1/2$ . При  $\eta \rightarrow \infty$   $T(\eta)$  стремится к нулю.

Очевидно, что для равновесного кругового кольца  $\tau^S(A) = \tau^S(B)$ . Отсюда и из уравнения (5) вытекает, что напряжения, создаваемые преципитатом в точках  $A$  и  $B$ , также равны. Обозначим

$$P = -\frac{\tau^P(0, y_A, z_0)}{M} = -\frac{\tau^P(0, y_B, z_0)}{M}.$$

Функция  $T(\eta)$  принимает значение  $P$  в двух точках, которые мы обозначим  $\eta_A(P)$  и  $\eta_B(P)$ . Тогда радиус кольца равен

$$\rho = z_0 \frac{\eta_B(P) - \eta_A(P)}{2}, \quad (7)$$

а кривизна кольца

$$k = \frac{2}{z_0} \cdot \frac{1}{\eta_B(P) - \eta_A(P)}. \quad (8)$$

Численная величина  $P$  в (7) и (8) пока остается неизвестной. Рассмотрим функцию  $P(\mu)$ , обратную  $\mu(P) = kz_0 = \frac{2}{\eta_B(P) - \eta_A(P)}$ .

График  $P(\mu)$  изображен на рис. 3 (кривая 1). Самодействие  $\tau^S$  круговой дислокации в точках  $A$  и  $B$  определяется ее кривизной  $k$  и, следовательно, также может быть выражено как функция от  $\mu = kz_0$ . Построим на том же рис. 3 график функции  $S(\mu) = \frac{\tau^0 + \tau^S(\mu)}{M}$  (кривая 2). Поскольку равенство  $P(\mu) = S(\mu)$  эквивалентно уравнению (1), то каждой общей точке кривых  $P(\mu)$  и  $S(\mu)$  отвечает равновесное кольцо. Пусть точка пересечения  $C$  имеет координаты  $\mu_C, P_C$ . Зная  $\mu_C$ , по формуле (7) можно определить величину диаметра кольца, а с помощью графика  $T(\eta)$  по найденному  $P_C$  определить  $\eta_A$  и  $\eta_B$ . Далее, принимая во внимание (6), получаем

$$y_A = z_0 \cdot \eta_A, \quad y_B = z_0 \cdot \eta_B,$$

определяя тем самым положение точек  $A$  и  $B$  кольца. Этим завершается решение задачи.

**Устойчивость.** Можно показать, что, если в точке пересечения выполняется неравенство  $\frac{dP}{d\mu} > \frac{dS}{d\mu}$ , то кольцо будет устойчивым, в противоположном случае — неустойчивым. В зависимости от величины  $z_0$  график  $S(\mu)$  пройдет ближе или дальше от оси  $\mu$ . Он может пересечь кривую  $P(\mu)$  в двух точках, в одной или не пересечь вообще. При наличии двух точек пересечения одна из них соответствует устойчивому кольцу, а другая — неустойчивому. Устойчивое кольцо отвечает меньшему значению  $\mu$  (точка  $C$ ), т. е. большему диаметру кольца.

Именно этот случай реализуется в процессе смыкания ветвей огибающей преципитат дислокации. Неустойчивое кольцо, соответствующее второй точке пересечения (точке  $E$ ), в таком процессе образоваться не может (это не исключает возможности его появления в каких-либо других процессах). При некотором  $z_0 = \xi$  у кривых  $P(\mu)$  и  $S(\mu)$  будет одна общая точка  $F$  (кривая 3). Этому случаю отвечает неустойчивое кольцо. При  $z_0 > \xi$  кривые  $P(\mu)$  и  $S(\mu)$  общих точек не имеют. Это означает, что в таких плоскостях скольжения равновесные кольца вообще не образуются.

**Пример расчета.** Проиллюстрируем описанный метод на конкретном примере. Используем значения параметров  $b, \varepsilon, r_0, \sigma^0$  и  $z_0$ , указанные выше. Построив график  $S(\mu)$  (см. рис. 3, кривая 2), определяем координаты точки пересечения  $C$ . Они таковы:  $\mu_C = 1,27, P_C = 0,216$ . Отсюда по формуле (7) находим диаметр кольца  $d = \frac{z_0}{\mu_C} = 277 \text{ \AA}$ . С помощью

графика функции  $T(\eta)$  (рис. 2) находим  $\eta_A = 0,06, \eta_B = 1,64$  и, наконец, координаты точек  $A$  и  $B$ :  $y_A = z_0 \cdot \eta_A = 287 \text{ \AA}, y_B = z_0 \cdot \eta_B = 10 \text{ \AA}$ . В результате получается кольцо, изображенное на рис. 1 сплошной линией. Интересно сравнить полученное круговое кольцо с более точно рассчитанным решением уравнения (1) при тех же значениях параметров. Из рис. 1 видно, что максимальное отклонение кругового приближения от точного решения не превышает 5% диаметра кольца. Такой же порядок имеет погрешность и при других значениях параметров, по крайней мере в диапазоне  $2 \text{ \AA} \leq b \leq 5 \text{ \AA}, 50 \text{ \AA} \leq r_0 \leq 250 \text{ \AA}, 0,01 \leq \varepsilon \leq 0,05$ .

**Обсуждение.** В работе [2], посвященной дислокационным кольцам, образующимся при закалке, был проведен полуколичественный расчет равновесного кольца. Расчет был выполнен для плоскости, пересекаю-

щей включение, причем самодействие дислокации учитывалось в приближении линейного натяжения, а внешнее напряжение считалось равным нулю. При этом предполагалась круговая форма кольца и считалось, что в одной из точек кольцо касается включения, а уравнение равновесия записывалось лишь для точки, диаметрально противоположной точке касания.

Значения функции  $P(\mu)$

$\mu$	$P$	$\mu$	$P$	$\mu$	$P$
0	0	1,50	0,312	3,00	0,714
0,25	0,001	1,75	0,406	3,25	0,748
0,50	0,012	2,00	0,490	3,50	0,777
0,75	0,049	2,25	0,562	3,75	0,803
1,00	0,119	2,50	0,622	4,00	0,827
1,25	0,212	2,75	0,672		

Следует отметить, что при таком подходе часть кольца, расположенная около включения, на самом деле оказывается в условиях, весьма далеких от равновесия. Это приводит к существенной погрешности в определении положения кольца (по нашим оценкам, погрешность может достигать 40%). Помимо этого, предположение статьи [2] о зацеплении кольца за включение позволяет рассчитывать кольца только для плоскостей, пересекающих включение. Между тем, как это вытекает из наших расчетов, в плоскостях, не пересекающих включение, может располагаться значительное количество дислокационных колец. Описываемый метод позволяет находить равновесные кольца и для таких плоскостей. При этом именно для таких плоскостей наш метод дает хорошую точность, а при  $z_0 < r_0$  он менее пригоден, поскольку напряжение, создаваемое преципитатом, имеет вид (2) только при условии  $x^2 + y^2 + z_0^2 \geq r_0^2$ .

Предлагаемый метод хотя и предполагает нахождение двух неизвестных  $y_A$  и  $y_B$ , в действительности (поскольку функция  $P(\mu)$  является универсальной) для нахождения кольца достаточно графически решить только одно уравнение. Значения функции  $P(\mu)$  приводятся в таблице.

Выражаю признательность А. А. Предводителеву за подробное обсуждение работы и многочисленные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hirsch P. B., Humphreys F. J. *Physics of Strength and Plasticity*. Ed. S. Argon, p. 189, The I. T. Press, 1969.
2. Gulden M. E., Nix W. D. *Phil. Mag.*, **18**, 217, 1968.
3. Fisher G. C., Hart E. W., Pry R. H. *Acta Metall.*, **1**, 336, 1953.
4. Hart E. W. *Relation of Properties to Microstructure*. ASM, p. 95, 1954.
5. Келли А., Никлсон Р. В. *Дисперсионное твердение*. М., 1966.
6. Майкова Э. П., Предводителев А. А. «Физика металлов и металловедение», **31**, вып. 4, 866, 1971.
7. Mott N. F., Nabarro F. R. N. *Proc. Phys. Soc.*, **52**, 86, 1940.
8. Brown L. M. *Phil. Mag.*, **10**, 441, 1964.

Поступила в редакцию  
30.11 1971 г.

Кафедра  
физики кристаллов