Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1973

УДК 530.145

ХЕЛЛАЛЬ ЭЛЬ ХАСЕН

ГРАДИЕНТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ «ПРЕДЕЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ»

Показано, что при наложении дополнительных условий на вспомогательные массы регуляризация «предельного представления» — градиентно-инвариантная.

В ряде работ [1, 2, 3] был предложен метод регуляризации — так называемое «предельное представление». На примере скалярной теории были сформулированы условия, при которых матричные элементы S-матрицы, регуляризованные R-операцией Боголюбова [4] и регуляризацией «предельного представления», совпадают. Этот метод недавно был перенесен нами на электродинамику [5]. В этой модели спинорные и фотонные пропагаторы рассматриваются как слабый предел непрерывных функций:

$$\Delta^c(x) = \lim_{\nu\to 0} \Delta^c(x, \nu) = \lim_{\nu\to 0} \int dk\, e^{ikx} \sum_i a_i(\nu) \frac{1}{m^2 \mathfrak{M}_i^2(\nu) - k^2 - i\varepsilon},$$

$$S^c(x) = \lim_{\mu\to 0} S^c(x, \mu) = \lim_{\mu\to 0} \int dk\, e^{ikx} \sum_i b_i(\mu) \frac{m + \hat{k}}{m^2 \mathfrak{N}_i^2(\mu) - k^2 - i\varepsilon},$$

где константы $a_i(\nu)$, $\mathfrak{M}_i(\nu)$, $b_i(\mu)$, $\mathfrak{N}_i(\mu)$ удовлетворяют условиям Паули—Вилларса [6]:

$$\sum_i a_i(\nu)\, \mathfrak{M}_i^\alpha(\nu) = 0,$$

$$\sum_i b_i(\mu)\, \mathfrak{N}_i^\alpha(\mu) = 0, \ \alpha = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

В этом представлении матричный элемент n-го порядка теории возмущения определяется как интеграл от произведения обобщенной функции на гладкую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathfrak{K}_n = \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dx_1 \ldots dx_n \, g(x_1 \ldots x_n) \prod_{i<j} \Delta^c (x_i - x_j, \nu_{\alpha(i,j)}) \times$$

$$\times \prod_{r<s} S^c (x_r - x_s, \mu_{\beta(r,s)}),$$

где $\mathfrak{P} = \frac{1}{N!} P(\nu_1 \ldots \nu_N)$ — сумма по всем перестановкам $(\nu_1, \ldots, \nu_N)$,

$$\lim_{(\nu\to 0)} = \lim_{(\nu_1\to 0)} \lim_{(\nu_2\to 0)} \ldots \lim_{\nu_N\to 0}.$$

В дальнейшем должны выполняться следующие условия.

1. Параметры $\mathfrak{M}_i(\nu)$ и $\mathfrak{N}_i(\mu)$ удовлетворяют равенствам:

$$\lim_{\nu\to 0} \sum_i a_i(\nu) \mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu) \operatorname{Ln}^{\beta} \mathfrak{M}_i(\nu) = A_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{n+2-\mathrm{L_{ext}}}{2}, \tag{2}$$

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) \mathfrak{N}_i^{\alpha}(\mu) \operatorname{Ln}^{\beta} \mathfrak{N}_i(\mu) = B_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

$$\alpha = \beta = 0, 1$$

(L_{ext} — число внешних линий; n — порядок ряда теории возмущений).

2. Предельный переход по параметрам, соответствующим спинорным пропагаторам, следует совершать до предельного перехода по параметрам, соответствующим фотонным пропагаторам; регуляризация «предельного представления» эквивалентна R-операции Боголюбова. Однако не вызывает ли применение этого метода нарушения градиентной инвариантности. В данной работе как раз и доказывается, что при некоторых фиксированных значениях «спинорных» констант $B_{\alpha,\beta}$ регуляризация «предельного представления» градиентно-инвариантна.

Для удобства сначала рассматриваются диаграммы, имеющие замкнутые спинорные циклы, а затем все диаграммы с незамкнутыми спинорными линиями.

§ 1. Градиентная инвариантность диаграмм с замкнутыми спинорными циклами

Известно[1], что полное выражение операторной функции n-го порядка S_n можно представить в виде суммы матричных элементов, соответствующих всем возможным диаграммам n-го порядка, содержащим n вершин. Исходя из одного матричного элемента S-матрицы, можно получить все остальные перестановкой всех возможных матрицы Дирака $\gamma_{\lambda_1}, \ldots, \gamma_{\lambda_n}$ и аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поэтому удобнее представить матрицу рассеяния n-го порядка в таком виде:

$$S_n = \int dx_1, \ldots, dx_n \prod_i^a A_{\lambda_i}(x_i) \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_P R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1, \ldots, x_n) \right\},$$

где $R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1, \ldots, x_n)$ — произведение всех сверток диаграмм, содержащих n вершин; P обозначает, что суммирование проводится по всем возможным диаграммам перестановкой матриц и аргументов

[1] См., например, (4).

Пусть G_n — некоторая диаграмма Фейнмана, состоящая из внутренних фотонных линий замкнутых спинорных циклов и внешних фотонных линий. Представим в регуляризованном виде матричный элемент S_n, соответствующий сумме всех возможных диаграмм типа G_n

$$S_n = \int \prod_i^a d\alpha_i \, A_{\lambda_i}(\alpha_i) \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_P R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha)_a \right\},$$

где

$$R_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_a) = \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int \prod_j^b d\alpha_j \, \Delta(\alpha_j \nu_j) \times$$

$$\times \int \prod_{l=1}^n dr_l \, Sp \left\{ \prod_{l=1}^n \gamma^{\lambda_l} S(r_l, \mu_l) \right\} \prod_{s=1}^v \delta \left(\sum_i^a \varepsilon_i^s \alpha_i + \sum_j^b \varepsilon_j^s \alpha_j + \sum_{l=1}^n e_l^s r_l \right).$$

Через r_l обозначаем импульсы спинорных линий, α_j — импульсы внутренних фотонных линий, α_i — импульсы внешних фотонных линий;

$$\varepsilon_i^s = \begin{cases} 0 \text{ если } i \neq s \\ 1 \text{ если } i = s \end{cases} \qquad e_l^s = \begin{cases} 1 \text{ если } s = l \\ 1 \text{ если линия } l_s \text{ выходит из } s \text{ и} \\ \quad \text{входит в } l \\ -1 \text{ в обратном случае} \end{cases}$$

Далее обозначим через $\overline{G}_n$ поддиаграмму, полученную из диаграммы G_n разрывом всех внутренних фотонных линий, соответствующих произведениям сверток $\prod_j \Delta(\alpha_j, \nu_j)$; соответственно этому диаграмма $\overline{G}_n$ содержит лишь спинорные замкнутые циклы, и поэтому его матричный элемент распадается на произведение матричных элементов, соответствующих этим циклам. Тогда матрица $\overline{S}_n$, соответствующая этим типам диаграмм, выражается следующим образом:

$$\overline{S}_n = \int \prod_i^a d\alpha_i \, A_{\lambda_i}(\alpha_i) \prod_j^b d\alpha_j \, A_{\lambda_j}(\alpha_j) \left\{ \prod \overline{T}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha) \right\},$$

где

$$\overline{T}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha) = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha : (\mu)) = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \frac{1}{n-1} \sum_P \int \prod_{l=1}^n dr_l \times$$

$$\times \, \mathrm{Sp} \left\{ \prod_{l=1}^n \gamma^{\lambda_l} S(r_l, \mu_l) \right\} \prod_{s=1}^v \delta \left(\sum_i^a \varepsilon_i^s \alpha_i + \sum_j^b \varepsilon_j^s \alpha_j + \sum_{l=1}^n e_l^s r_l \right),$$

Π обозначает, что в скобке стоит произведение матричных элементов, соответствующих всем циклам $\overline{G}_n$.

Следовательно, S_n можно представить в виде

$$S_n = \int \prod_i^a d\alpha_i \, A_{\lambda_i}(\alpha_i) \, \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int \prod_j^b d\alpha_j \, \Delta(\alpha_j, \nu_j) \left\{ \prod \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\alpha : (\mu)) \right\}. \tag{3}$$

Соотношение (3) показывает явно, что всякая зависимость от параметров (μ) будет относиться только к поддиаграммам типа $\overline{G}_n$, поэтому придется рассмотреть их свойства, чтобы установить законность предельного перехода по параметрам (μ).

Прежде всего отметим, что благодаря теореме Фарри диаграмма $\overline{G}_n$ содержит лишь четные замкнутые спинорные циклы. Тогда

$$S_{2n} = \int \prod_i^a d\alpha_i \, A_{\lambda_i}(\alpha_i) \, \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int \prod_j^b d\alpha_j \, \Delta(\alpha_j, \nu_j) \times$$
$$\times \left\{ \prod \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} T_{\sigma,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m-1}}(\alpha_\sigma; \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1}) \right\},$$

где

$$\overline{T}_{\sigma,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m-1}}(\alpha_\sigma, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1} \ (\mu)) = \sum_{k=1}^{2m-1} \int dr \, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k} \gamma^{\lambda_j} S(r + p_j, \mu_j) \times \right.$$
$$\left. \times \gamma^\sigma S(r + p_k + \alpha_\sigma, \nu_{k+1}) \prod_{j=k+1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r + p_j + \alpha_\sigma, \nu_{j+1}) \right\}, \tag{4}$$

$$p_j = \sum_{l=1}^{j} \alpha_l, \quad p_{2m-1} = -\alpha_\sigma, \ j \leqslant 2m-1,$$

α — импульсы внешних фотонных линий диаграммы, $2m$ — число спинорных линий замкнутого спинорного цикла.

Рассмотрим условия градиентной инвариантности, и прежде всего бесконечное малое градиентное преобразование потенциалов электромагнитного поля. При этом преобразовании матричный элемент S_{2n} получает следующее приращение:

$$\delta S_{2n} = \sum_\sigma g^{\sigma\sigma} \int \prod_i^a d\alpha_i \, f_\sigma(\alpha_\sigma) \prod_{i \neq \sigma} A_{\lambda_i}(\alpha_i) \, \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int \prod_j^b d\alpha_j \, \Delta(\alpha_j, \nu_j) \times$$
$$\times \{\alpha^\sigma \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}_{\sigma,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m-1}}(\alpha_\sigma; \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1} \ (\mu))\} \left\{ \prod{}' \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}(\alpha \ (\mu)) \right\}; \tag{5}$$

Π' обозначает, что в скобке стоит произведение матричных элементов $\overline{T}$ соответствующих всем циклам $\overline{G}_{2m}$, кроме цикла, содержащего вершину σ, из которой выходит внешняя фотонная линия $A_{\lambda_\sigma}(\alpha_\sigma)$.

Ввиду произвольности функции f_σ и требования инвариантности матричный элемент S_{2n} при градиентном преобразовании приводит к тому, что выполняется следующее условие:

$$\delta\overline{T} = \sum_\sigma g^{\sigma\sigma} \alpha^\sigma \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}_{\sigma,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m-1}}(\alpha_\sigma, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1} \ (\mu)) = 0. \tag{6}$$

Поскольку

$$\alpha^\sigma \gamma^\sigma = S^{-1}(r + p_k + \alpha_\sigma) - S^{-1}(r + p_k),$$

то соотношение (6) можно переписать в виде

$$\delta\bar{T} = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{2m-1} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) \times \right.$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma, \mu_{j+1}) \left. [S(r+p_k+\alpha_\sigma, \mu_{k+1}) S^{-1}(r+p_k+\alpha_\sigma)] \right\} -$$

$$- \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{2m-1} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) \times \right. \tag{7}$$

$$\times \prod_{j=k}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma; \mu_{j+1}) \left. [S(r+p_k, \mu_k) S^{-1}(r+p_k)] \right\}.$$

В первом слагаемом выражения (7) выделим из знака суммы член, для которого $k=2m-1$, а из второго — член, для которого $k=1$. При этом получим

$$\delta\bar{T} = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j-1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) [S(r+p_{2m-1}+\alpha_\sigma, \mu_{2m-1}) \times \right.$$

$$\times S^{-1}(r+p_{2m-1}+\alpha_\sigma)] \Big\} + \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{2m-1} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) \prod_{j=k+1}^{2m-1} \times \right.$$

$$\times \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma, \mu_{j+1}) \times \left. [S(r+p_k+\alpha_\sigma, \mu_{k+1}) S^{-1}(r+p_k+\alpha_\sigma)] \right\} -$$

$$- \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma, \mu_{j+1}) [S(r+p_1, \mu_1) S^{-1} \times \right. \tag{8}$$

$$\times (r+p_1)] \Big\} + - \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \sum_{k=2}^{2m-1} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j\, \mu_j) \prod_{j=k}^{2m-1} \times \right.$$

$$\times \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma, \mu_{j+1}) \left. [S(r+p_k, \mu_k) S^{-1}(r+p_k)] \right\}.$$

Если в последнем слагаемом выражения (8) совершим преобразование индекса $k \to k+1$, принимая во внимание, что $p_{2m-1}+\alpha_\sigma = 0$, то получим:

$$\delta\bar{T} = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) [S(r, \mu_{2m}) S^{-1}(r) - S(r+p_1 - \right.$$

$$- \alpha_\sigma, \mu_1) S^{-1}(r+p_1-\alpha_\sigma)] \Big\} + \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{2m-2} \int dr\, Sp \left\{ \prod_{j=1}^{k} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j, \mu_j) \times \right.$$

$$\times \prod_{j=k+1}^{2m-2} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma, \mu_{j+1}) [S(r+p_k+\alpha_\sigma, \mu_{k+1}) S^{-1}(r+p_k+\alpha_\sigma) -$$

$$- S(r+p_{k+1}, \mu_{k+1}) S^{-1}(r+p_{k+1})] \Big\}. \tag{9}$$

Рассмотрим вопрос о возможности предельного перехода под знаком интеграла по параметрам (μ). По определению имеем

$$\mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} = \frac{1}{2m} \sum_{\rho=1}^{2m} \lim_{\mu_\rho \to 0} \mathfrak{P} \lim_{(\bar{\mu}_\rho)\to 0},$$

$$(\bar{\mu}_\rho) = (\mu_1, \ldots, \mu_{\rho-1}; \mu_{\rho+1}, \ldots, \mu_{2m}).$$

При осуществлении предельного перехода по $(\bar{\mu}_\rho)$ выражение (9) благодаря условию (1) сходится как

$$\alpha^\sigma \lim_{\mu_\rho} \bar{T}(\mu_\rho) \sim \int_{m\geqslant 1} d^{(1)} r\, r^{-2m} < +\infty.$$

Отсюда следует, что совершение предельного перехода по параметрам $(\bar{\mu}_\rho)$ под знаком интеграла в соотношение (9) законно. Тогда получим

$$\delta\bar{T} = \frac{1}{2m} \lim_{\mu\to 0} \int dr\, Sp \Big\{ \prod_{j=1}^{2m-1} \lambda^{\lambda_j} S(r+p_j) \times$$

$$\times [S(r, \mu) S^{-1}(r) - S(r+p_1-\alpha_\sigma, \mu) S^{-1}(r+p_1-\alpha_\sigma)] \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{2m} \lim_{\mu\to 0} \sum_{k=1}^{2m-2} \int dr\, Sp \Big\{ \prod_{j=1}^{k} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j) \prod_{j=k+1}^{2m-1} \gamma^{\lambda_j} S(r+p_j+\alpha_\sigma) \times$$

$$\times [S(r+p_k+\alpha_\sigma, \mu) S^{-1}(r+p_k+\alpha_\sigma) - S(r+p_{k+1}, \mu) S^{-1}(r+p_{k+1})] \Big\}. \tag{10}$$

Осталось установить законность предельного перехода под знаком интеграла в соотношении (10) по параметру (μ), осуществление которого приводит к выражениям, расходящимся при больших импульсах как:

$$\delta\bar{T} \sim \int d^{(1)} r\, r^{-(2m-4)}. \tag{11}$$

Из соотношения (11) следует, что если $m>2$, то в формуле (10) предельный переход по μ под знаком интеграла разрешен, поскольку получаемые интегралы абсолютно сходятся; но если $m\leqslant 2$, то интегралы в (10) после совершения предельного перехода по μ при больших импульсах расходятся.

В случае, когда $m>2$, из соотношения (10) после совершения предельного перехода получим

$$\alpha_\sigma \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \bar{T}_{\sigma,\lambda_1\ldots\lambda_{2m-1}}(\alpha_\sigma, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m-1}(\mu)) = 0,$$

где $m > 2$.

Таким образом, для диаграмм, порядок которых выше второго, условие градиентной инвариантности выполняется.

Когда ($m \leqslant 2$) для большей наглядности в каждом конкретном случае надо устанавливать условия, при которых градиентная инвариантность выполняется.

$m=1$ (диаграмма собственной энергии фотона). Матричный элемент этой диаграммы имеет следующий вид:

$$\Pi^{\alpha\beta}(q) = 8i\pi^2 (q^\alpha q^\beta - g^{\alpha\beta} q^2) \left\{ \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) \int_0^1 d\xi \xi (1-\xi) \times \right.$$

$$\left. \times \ln (m^2 [\xi \mathfrak{R}_i^2 (\mu) + (1-\xi)] - \xi (1-\xi) q^2) \right\} +$$

$$+ i m^2 g^{\alpha\beta} \left\{ \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) \mathfrak{R}_i^2 (\mu) \ln \mathfrak{R}_i (\mu) - \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i (\mu) \ln \mathfrak{R}_i (\mu) \right\}.$$

Следовательно, чтобы матричный элемент $\Pi^{\alpha\beta}(q)$ был градиентно-инвариантен, необходимо выполнение условия

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu \quad \mathfrak{R}_i^2 (\mu) \ln \mathfrak{R}_i (\mu) - \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i (\mu) \ln \mathfrak{R}_i (\mu) = B_{2,1} - B_{0,1} = 0.$$

$m=2$ (диаграмма с четырьмя спинорными линиями). Регуляризованный матричный элемент выражается в виде

$$\mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overset{abcd}{\square} (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 : (\mu)) = \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dr\, Sp \{\gamma^a S(r+p_1,\ \mu_1) \gamma_b \times$$

$$\times S(r+p_2,\ \mu_2) \gamma^c S(r+p_3,\ \mu_3) \gamma^d S(r,\ \mu_4)\}.$$

Для этой диаграммы условие градиентной инвариантности сводится к следующему:

$$\sum_a g^{aa} p_1^a \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overset{abcd}{\square} (p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 : (\mu)) = 0. \tag{12}$$

Дифференцируя формулу (1.2) по p_1^a и полагая $p_1^a = 0$, находим

$$\mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overset{abcd}{\square} (0,\ p_2,\ p_3,\ p_4 : (\mu)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overset{abcd}{\square} (0,\ 0,\ 0,\ 0 : (\mu)) = 0. \tag{13}$$

Соотношение (13) является условием выполнения градиентной инвариантности.

Лишь благодаря логарифмической расходимости ($\omega(G)=0$) диаграммы G_4, вычитание ряда Маклорена сводится к вычитанию из $\mathfrak{P}$ lim□ его значения при нулевых значениях импульсов внешних фотонов. Ввиду (13) эта величина равна нулю и сам матричный элемент оказывается сходящимся. Следовательно, при выполнении условия

$$\mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overset{abcd}{\square} (0,\ 0,\ 0,\ 0:(\mu)) = \frac{4}{3} i\pi^2 \{g^{ac}g^{bd} + g^{bc}g^{ad} - 2g^{ab}g^{cd}\} \times$$

$$\times \left\{ \lim_{\mu\to 0} \sum_i b_i(\mu) Ln\, \mathfrak{N}_i(\mu) + \frac{5}{12} \right\}$$

матричный элемент G_4 градиентно-инвариантен.

Таким образом, в случае, когда $m \leqslant 2$, градиентная инвариантность выполняется при условии

$$B_{0,1} = B_{2,1} = 5/12. \tag{14}$$

Следовательно, для всех $m \geqslant 1$ при выполнении условия (14) получим

$$\alpha^\sigma \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \overline{T}_{\sigma,\lambda_1,\dots,\lambda_{2m-1}} (\alpha_{\sigma_i} \alpha_1, \dots, \alpha_{2m-1} : (\mu)) = 0.$$

Отсюда вытекает, что (см. (17)) приращение (5) также обратится в нуль.

Таким образом, мы доказали, что матричный элемент S_{2n}, соответствующий всем возможным диаграммам n-го порядка теории возмущения (диаграммам, имеющим лишь замкнутые спинорные линии), градиентно-инвариантен.

§ 2. Градиентная инвариантность диаграмм незамкнутых циклов

Как и в § 1, для операторной функции n-го порядка S_n запишем следующее выражение:

$$S_n = \sum_p M_{1\dots n}(l_j\ q),$$

где $M_{1\dots n}$ — матричный элемент диаграммы незамкнутого цикла G'_n.

Пусть G'_n — некоторая диаграмма Фейнмана, состоящая из внутренних фотонных (r_i) и спинорных (r_j) линий и с любым числом внешних фотонных и спинорных линий с соответствующими им импульсами (q) и (l). Ее регуляризованный матричный элемент имеет вид

$$M_{1\dots n}(l;\ q) = :\prod_a \overline{\Psi}(l_a) \Big\{ \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0}\ \mathfrak{P} \lim_{(\mu)\to 0} \int dr\, C_{1\dots n}(r,\ q,\ l:(\mu)) \times$$

$$\times F(r,\ q,\ l:(\nu)) \Big\} \prod_i A_i(q_i) \prod_b \Psi(l_b):, \tag{15}$$

где $C_{1\dots n}(r,\ q,\ l:(\mu))$ — произведение всех спинорных пропагаторов, $F(r, q, l(\nu))$ — произведение всех фотонных пропагаторов.

Рассмотрим предельный переход по параметрам (μ) под знаком интеграла в выражении (15). Благодаря условию (1) при больших импульсах r пропагатор $\Delta^c(r, \nu)$ ведет себя как:

$$\Delta^c(r,\ \nu) \sim (r^2)^{-3}.$$

Следовательно, при больших импульсах функция Δ^c ведет себя как $(r^2)^{-3}$ (α — число внутренних фотонных линий).

Поскольку мы рассматриваем диаграммы с незамкнутыми спинорными линиями, то число внутренних фотонных и спинорных линий α и β всегда положительно, т. е. $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 2$. Следовательно, какой бы ни была диаграмма G_n', мы имеем право совершить предельный переход по параметрам (μ) под знаком интеграла в выражении (15), так как функция $F(r, q, l:\nu))$ гарантирует всегда сходимость интеграла, что легко проверить.

Если $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 2$, то при $r \gg 0$

$$M_{1\ldots n} \sim \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int d^{(1)}r\, r^3 (r^2)^{-3\alpha} r^{-\beta} < +\infty.$$

И значит необходимость регуляризации незамкнутых спинорных линий не возникает. Тогда S_n можно представить в виде

$$S_n = \sum_f : \prod_a \overline{\Psi}(l_a) \Big\{ \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int dr\, C_{1\ldots n}(r, q, l) \times$$
$$\times F(r, q, l:(\nu)) \Big\} \prod_i A_i(q_i) \prod_b \Psi(l_b): \tag{16}$$

Условие градиентной инвариантности матричного элемента может быть получено из соотношения (16) после воздействия на него обратным преобразованием Фурье. Итак, получаем следующее приращение для S_n:

$$\delta S_n = \sum_f : \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int dx_1 \ldots dx_n \prod_{t\neq i} A_t(x_t) f_i(x_i) \prod_{r<s} \Delta^c(x_r - x_s, \nu_{\alpha(r,s)}) \times$$
$$\times \Big\{ div_i \prod_a \overline{\Psi}(x_a) C_{1\ldots i\ldots n}(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) \prod_b \Psi(x_b) \Big\}:$$

Вычисляя соответствующие дивергенции в (17), находим:

$$\delta S_n = : \mathfrak{P} \lim_{(\nu)\to 0} \int dx_1 \ldots dx_n \prod_{t\neq i} A(x_t) f(x_i) \prod_{r<s} \Delta^c(x_r - x_s, \nu_{\alpha(r,s)}) \times$$
$$\times \Big\{ \sum_{\theta=1}^{\overline{N}!} \delta(x_\theta - x_i) - \sum_{\theta'=1}^{\overline{N}!} \delta(x_i - x_{\theta'}) \Big\} \times$$
$$\times \prod_a \overline{\Psi}(x_a) C_{1\ldots n-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}; x_{i+1}, \ldots x_n) \prod_b \Psi(x_b),$$

где

$$\overline{N} = \{1, 2, \ldots, i-1; i+1, \ldots n\}.$$

Отсюда $\delta S_n = 0$.

Таким образом мы доказали, что матрица рассеяния n-го порядка, представляющая собой сумму матричных элементов, соответствующих всем возможным диаграммам n-го порядка незамкнутых спинорных циклов, регуляризованных методом «предельного представления», градиентно-инвариантна.

Применение регуляризации «предельного представления» в квантовой электродинамике позволило получить два важных результата. С одной стороны, обеспечивается конечность всех матричных элементов S-матрицы (предложенная регуляризация является обобщенной формой регуляризации Паули—Вилларса и, кроме того, благодаря условию (2) окончательной), с другой стороны, сохраняется условие градиентной инвариантности при наложении условия на «спинорные» константы $B_{\alpha,\beta}$.

Автор выражает искреннюю благодарность Д. А. Славнову за постановку задачи и за большую помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнов Д. А. ДАН, **143**, 570, 1962.
2. Славнов Д. А. ЖЭТФ, **42**, 1543, 1962.
3. Славнов Д. А. Кандидатская диссертация. МГУ, 1963.
4. Парасюк О. С. «Украинский матем. журнал», **12**, № 3, 287, 1960.
5. Хеллаль Эль Хасен. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **14**, № 3, 1973.
6. Pauli W., Willars F. Rev. Mod Phys., **21**, 434, 1949.
7. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., 1957.

Поступила в редакцию
9.12 1971 г.

Кафедра
квантовой статистики