

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1973

УДК 534.2

В. И. ПАВЛОВ

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрен вопрос о связи между затуханием и скоростью распространения волн конечной амплитуды на поверхности жидкости. Эта связь не является случайной. В статье показано, что учет нелинейных эффектов, приводящих к появлению амплитудных поправок в выражении для скорости волн, приводит также к амплитудной зависимости релаксационных процессов поверхностных волн.

Изучение нелинейных волновых процессов показывает, что скорость распространения волны конечной амплитуды зависит от амплитуды волны. Это общее явление для любых типов волн, в том числе и для волн на поверхности жидкости.

В зависимости от того как ставится задача, функциональная связь  $\omega = \omega(k, \xi_0)$  может оказаться различной. Если мы предполагаем существование потенциальных стационарных волн конечной амплитуды, то зависимость  $\omega = \omega(K, \xi_0)$  или, что то же самое,  $C = C(K, \xi_0)$ , определяется результатами, например, работ [1—4]. Отказ от условия стационарности, вообще говоря, приводит к изменению функции  $\omega = \omega(K, \xi_0)$ . Наиболее общий подход к определению амплитудной зависимости  $\omega = \omega(K, \xi_0)$  заключается в использовании уравнений Гамильтона [5].

Для нас в дальнейшем будет существенно только то, что тем или иным методом зависимость скорости распространения волны на поверхности жидкости от амплитуды может быть определена, а в случае малых амплитуд ее можно записать в виде

$$C = C_0 [1 + \gamma \varepsilon^2(K)]. \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  — некоторый численный множитель<sup>1</sup>,  $\varepsilon$  — параметр, характеризующий нелинейность и пропорциональный наклону волны,  $C_0$  — скорость волны в линейном приближении. Для волн на поверхности жидкости

---

<sup>1</sup>) Для стоксовской гравитационной волны [1]  $\gamma = \frac{1}{2}$ , для капиллярной стационарной волны [4]  $\gamma = -\frac{1}{16}$  и т. д.

$$C_0 = \sqrt{\sigma K + \frac{g}{K}} = \sqrt[4]{g\sigma} \sqrt{k + \frac{1}{k}}, \quad (2)$$

причем  $k = \frac{K}{K_m}$ ,  $K_m = \left(\frac{g}{\sigma}\right)^{1/2}$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Изучение той или иной модели в электродинамике или акустике показывает, что между поглощением и скоростью распространения волны существует определенная связь, причем связь эта не является случайной.

Другими словами, величины, характеризующие волновое поле (будь то напряженность электромагнитного поля в электродинамике или звуковое давление в акустике), пропорциональны множителю  $\exp i\omega(k) \left[ \frac{x}{u(k)} - t \right]$ , где  $\operatorname{Re} u(k)$  характеризует скорость распространения волны, а  $\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$  описывает поглощение. Оказывается, между  $\operatorname{Re} \frac{1}{u(k)}$  и  $\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$  существует общая связь, не зависящая от выбора конкретной модели. Эта связь в электродинамике и акустике изучена достаточно хорошо [6, 7].

Подобно тому, как это делается в других областях физики, будем предполагать, что для волн на поверхности жидкости существует интегральная связь между скоростью распространения и поглощением волны.

Рассмотрим поведение комплексной функции скорости  $\frac{1}{u(k)} = \operatorname{Re} \times \frac{1}{u(k)} + i \operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$  в плоскости комплексного переменного  $K$ . Вначале рассмотрим линейный случай, когда <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{u(k)} &= (g\sigma)^{-1/4} \left(k + \frac{1}{k}\right)^{-1/2}, \\ \operatorname{Im} \frac{1}{u(k)} &= \left(\frac{2\nu}{g^{1/2}\sigma^{3/2}}\right) \frac{k}{k + \frac{1}{k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда следует, что в плоскости комплексного переменного  $k$  существует для функции  $\frac{1}{u(k)}$  особые точки (полюса и точки ветвления). Используя теорему Коши, можем записать

$$\frac{1}{u(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{u(k_1)} \frac{dk_1}{k_1 - k}. \quad (4)$$

Контур  $C$ , по которому ведется интегрирование, выбран таким образом, чтобы внутри контура не было особенностей функции  $\frac{1}{u(k)}$ .

<sup>1</sup> Выражения (3) имеют такой вид только в случае не слишком больших  $k$ . Для высоких частот  $k \gg 1$ , функции  $\operatorname{Re} \frac{1}{u(k)}$  и  $\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$  имеют более сложный вид. Для нас это несущественно, так как частота, на которой становится заметным искажение зависимости (3), очень велика.

При обходе точек ветвления функции  $\operatorname{Re} \frac{1}{u(k)}$  меняет знак, поэтому интегралы по берегам разреза равны, а не равны с противоположным знаком, как это наблюдается при обходе полюсов. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)} = -\frac{i}{2\pi} \int_{c'_3+c'_5+c_2} \operatorname{Im} \frac{1}{u(k_1)} \frac{dk_1}{k_1-k} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{c_1+c_3+c_5} \operatorname{Re} \frac{1}{u(k_1)} \frac{dk_1}{k_1-k} \right\}.$$

Здесь

$$\left( \int_{c'_1, c'_3, c'_5} \right) \operatorname{Re} \frac{1}{u(k_1)} \frac{dk_1}{k_1-k} = 0.$$

Вообще говоря, выражение (5) должно удовлетворяться тождественно. Чтобы показать, что первое слагаемое справа в соотношении (5) в точности равно  $\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$ , нужно вычислить соответствующие интегралы. Вычисление второго слагаемого показывает, что оно обращается в нуль. Такое заключение можно сделать также из следующего рассмотрения. Теорема Коши, а следовательно, и выражение (5), справедливы для любых сред, независимо от того, как меняются параметры, характеризующие свойства среды. Но изменяя в последнем слагаемом (5), например, параметр  $g$ , мы видим, что первая часть (5) изменяется, в то время как левая часть остается по величине прежней, т. е. получаем не тождество, а уравнение. Указанное противоречие и свидетельствует о том, что последнее слагаемое (5) обращается в нуль, если использовать линейную теорию.

Если учесть нелинейность, то появление амплитудных поправок для скорости должно сказаться на затухании волн.

В дальнейшем будем предполагать, что  $k \ll 1$ . Это соответствует случаю гравитационных волн. Кроме того, ограничимся случаем маловязких жидкостей типа, например, воды. Тогда из выражений (1) и (5) получим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)} = \frac{\nu K^2}{g} + \frac{1}{\pi c_m} \operatorname{Re} \left\{ \int_{c_1+c'_3+c_5} \frac{\gamma \varepsilon^2(k_1)}{c_0(k_1)} \frac{dk_1}{k_1-k} \right\}. \quad (6)$$

Предположим, что в точке  $k_0 (\operatorname{Im} k_0 = 0)$  функция  $\varepsilon^2(k)$  имеет резкий максимум. Распределение, имеющее резкий максимум, может быть представлено в виде

$$\varepsilon^2(k) = \varepsilon_0^2 \exp \left[ -\frac{(k_1 - k_0)^2}{\theta^2} \right]. \quad (7)$$

При таком распределении параметра нелинейности интеграл в (6) в основном будет определяться окрестностью точки  $k_0$ . Следовательно, интегралы по  $c_3$ ,  $c_5$  дадут пренебрежимо малый вклад в выражение (6), а интеграл по  $c_1$  можно вычислить методом перевала.

Пусть  $k_0 \ll k$ , т. е. максимум распределения расположен слева от  $k$ -состояния. В этом случае имеем

$$I = \operatorname{Re} \int_{C_1} \gamma \frac{\varepsilon^2(k_1)}{C_0(k_1)} \frac{dk_1}{k_1 - k} \cong - \frac{\gamma \theta \sqrt{\pi}}{C_0(K_0) K} \varepsilon_0^2. \quad (8)$$

Если  $k_0 \gg k$ , то аналогично получаем

$$I = \operatorname{Re} \int_{C_1} \gamma \frac{\varepsilon^2(k_1)}{C_0(k_1)} \frac{dk_1}{k_1 - k} \cong \frac{\gamma \theta \sqrt{\pi}}{C_0(k_0) k_0} \varepsilon_0^2. \quad (9)$$

Подставляя полученные выражения в (6), находим коэффициент поглощения волны в  $k$ -состоянии с учетом нелинейных эффектов. Здесь существенно то, что в зависимости от местонахождения  $k$ -состояния относительно максимума распределения параметра нелинейности знак дополнительного нелинейного затухания различен. Это приводит к весьма важным следствиям. При достаточно большой нелинейности ( $\varepsilon_0^2 \geq 10^{-1}$ ) при  $k \ll 1$  нелинейный член в поглощении может оказаться значительно больше, чем слагаемое, обусловленное вязкостью. Действительно,

$$\frac{g |I|}{\pi c_m \nu k^2} \sim 10^3 \left( \frac{\theta}{k_0} \right) \frac{k_0^{1/2}}{k^2} \Big|_{k \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Поэтому при большой нелинейности и достаточно малом  $k$  в (6) можно опустить первое слагаемое и для времени релаксации (учитывая определение  $\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)}$ ) получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &\cong - \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\theta}{k_0} \right) \left( \frac{k_0}{k_0} \right) \omega \varepsilon_0^2, \text{ если } k_0 \ll k, \\ \frac{1}{\tau} &\cong \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\theta}{k_0^3} \right) \omega \varepsilon_0^2, \text{ если } k_0 \gg k. \end{aligned} \quad (10)$$

Из рассмотрения выражений (10) следует, что при заданных условиях спектр со временем перераспределяется, энергия перебрасывается в высокочастотную часть спектра. Об этом и свидетельствуют разные знаки выражений (10). Такое перераспределение, по-видимому, может объяснить резкое падение амплитуд равновесного спектра волнения при очень низких частотах, которое наблюдается экспериментально.

Особый интерес представляет случай, когда  $k_0 = k$ , т. е. максимум распределения параметра нелинейности совпадает с  $k$ -состоянием. Тогда можно записать

$$I = \operatorname{Re} \int_{C_1} \frac{\gamma \varepsilon_0^2}{C_0(k_1)} \frac{\exp \left[ - \frac{(k_1 - k)^2}{\theta^2} \right]}{k_1 - k} dk_1 = \operatorname{Re} \int_{C_1} \frac{\gamma \varepsilon_0^2}{c_0(k_1)} \exp(-f) dk_1. \quad (11)$$

Здесь

$$f = \frac{(k_1 - k)^2}{\theta^2} + \ln(k_1 - k).$$

Чтобы вычислить интеграл (11), деформируем контур  $C_1$ . Функция  $f$  имеет резкий максимум в точке  $k^* = k - i \frac{\theta}{\sqrt{2}}$ , причем  $f|_{k=k^*} = - \frac{1}{2} +$

$+\ln\left(-i\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$ , а  $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}\right|_{k=k^*} = \frac{4}{\theta^2} \gg 1$ . Поэтому деформируя  $C_1$  так, чтобы он проходил через максимум функции  $f$ , как указано на рисунке можно записать

$$I = \operatorname{Re} \int_{L_1+L_2} \frac{\gamma \varepsilon_0^2}{c_0(k_1)} \exp\left(\frac{1}{2} - \ln\left(-i\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{\theta^2}(k_1 - k^*)^2\right) dk_1 =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ i \frac{\gamma \varepsilon_0^2}{c_0(k^*)} \sqrt{e} \frac{\sqrt{2}}{\theta} \right\} \int dx \exp\left(-\frac{2}{\theta^2} x^2\right) = \operatorname{Re} \left\{ i \frac{\gamma \varepsilon_0^2}{c_0(k^*)} (\pi e)^{1/2} \right\}. \quad (12)$$

В выражении (12) опущен интеграл по  $L_2$ , дающий экспоненциально малый вклад в это выражение. Учитывая, что для  $k \ll 1$ ,  $c_0^{-1} = \sqrt{2k}$  имеем  $c_0^{-1}(k^*) \cong \sqrt{2} \left(k - i\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} = \sqrt{2k} \left(1 - i\frac{\theta}{2\sqrt{2}k}\right)$ , т. е.

$$I = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\pi e}{2}\right)^{1/2} \frac{\theta}{k} \frac{\varepsilon_0^2}{c_0(k)}. \quad (13)$$

Подставляя это выражение в (6), находим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{u(k)} = \underbrace{\frac{\nu k^2}{g}}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi e}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\theta}{k}\right) \frac{\varepsilon_0^2}{c_m c_0(k)}}_{\alpha_2}. \quad (14)$$

При достаточно большой нелинейности  $\varepsilon_0^2 \gg 10^{-1}$  можно ожидать:

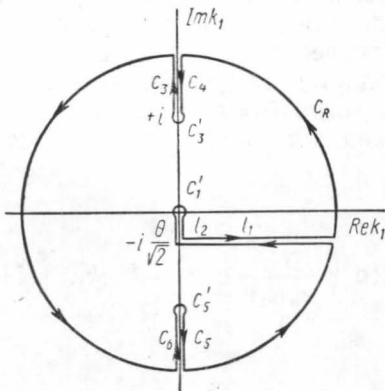
$$\frac{|\alpha_2|}{|\alpha_1|} \sim 10^2 \left(\frac{\theta}{k}\right) \frac{1}{k^{3/2}} \Big|_{k \rightarrow 0} \rightarrow \infty.$$

Поэтому первым слагаемым в (14) при больших нелинейностях можно пренебречь.

При этих условиях время релаксации почти монохроматической гравитационной волны определяется из (14) выражением

$$\frac{1}{\tau} \cong \left(\frac{\gamma}{2} \left(\frac{e}{2\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\theta}{k}\right)\right) \omega \varepsilon_0^2. \quad (15)$$

В заключение сделаем некоторые замечания, относящиеся к выражениям (15), (10). При выводе этих выражений не делалось никаких предположений относительно характера волнового движения. Движение могло быть потенциальным, вихревым или турбулентным, но обязательно конечной амплитуды. Использование наиболее общих свойств нелинейной волновой системы и позволило получить выражение (15), которое может представлять определенный интерес для изучения динамики морского волнения. В частности, многочисленные экспериментальные исследования показали, что затухание морских волн не определяется величиной.



$$\frac{1}{\tau} = 2\nu K^2, \quad (16)$$

где  $\nu$  — кинематическая молекулярная вязкость,  $K$  — волновое число. Время релаксации  $\tau$ , рассчитанное по этой формуле, оказывается слишком большим и не соответствует наблюдаемому в природе. Оказалось, что если вместо величины  $\nu$  подставить в (16) выражение  $\nu_T = \alpha\omega\xi_0^2$ , где  $\omega$  — частота волнового процесса,  $\xi_0$  — амплитуда волны, частота которой  $\omega$ ,  $\alpha$  — численный множитель, то время релаксации, рассчитанное по такой формуле, вполне удовлетворительно совпадает с наблюдаемым экспериментально. В [8] сделана попытка теоретически обосновать такую замену, но все расчеты в данном случае опирались на предположение о турбулентном (слоистом) волновом движении и требовали привлечения дополнительных, не следующих из уравнений движения параметров.

С учетом этих обстоятельств выражение (15), а также метод, каким оно было получено, может представлять определенный интерес.

В заключение автор выражает благодарность В. А. Красильникову за плодотворные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Собр. соч., т. 1, статья 19. М., 1961.
2. Секерж-Зенькович Я. И. ДАН СССР, 109, 913, 1956.
3. Старрег G. D. J. Fluid Mech., 2, 532, 1957.
4. Павлов В. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 6, 1970.
5. Захаров В. Е. «Журн. прикладной математики и математич. физики», 2, 1968.
6. Мигдал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики. М., 1966.
7. Гинзбург В. Л. «Акустический журнал», 1, 1, 1955.
8. Шулейкин В. В. Физика моря. М., 1968.

Поступила в редакцию  
20.11 1971 г.

Кафедра  
акустики