Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1973

УДК 539.17

И. В. АМИРХАНОВ, В. Е. ГРЕЧКО, Р. К. ДЕМЕНТЬЕВ

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕАКЦИЙ С ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ

В рамках метода многоканальной связи на парциальные амплитуды рассеяния для реакций с перераспределением частиц и реакций при энергиях выше порога развала получена система уравнений, которые являются аналогом известных фазовых уравнений. Кроме того, подобные уравнения написаны для полных амплитуд рассеяния. Используя уравнения квазипотенциального подхода для задачи двух тел, получены релятивистские фазовые уравнения.

Одним из эффективных способов решения квантовомеханических задач является метод фазовых функций. Этот метод интенсивно развивается, ему посвящены уже две монографии [1, 2] и проведен ряд численных расчетов [3]. В рамках этого метода можно перейти от сложного уравнения Шредингера к более простым системам уравнений на парциальные фазы и амплитуды. Однако для реакций с перераспределением частиц (включая и канал развала) аналогичные уравнения не были получены.

В данной работе метод фазовых функций обобщается для реакций с перераспределением частиц и для реакций при энергиях выше порога развала на три фрагмента. Кроме того, получены уравнения для полной амплитуды рассеяния и введен релятивистский аналог фазовых уравнений.

1. Рассмотрим задачу двух тел. Пусть $\Phi_l^{(1)}(k, r)$ и $\Phi_l^{(2)}(k, r)$ два линейно независимых решения свободного радиального уравнения Шредингера. Тогда в области, где потенциал взаимодействия $V(r)$ равен нулю, асимптотику волновой функции можно представить в виде

$$\varphi_l^A(k, r) = \Phi_l^{(1)}(k, r) + F_l(k)\,\Phi_l^{(2)}(k, r). \tag{1}$$

«Обрезая» потенциал в произвольной точке b и используя условие непрерывности логарифмической производной волновой функции в этой точке, запишем

$$F_l(k, b) = [\varphi_l(k, b)\,\dot{\Phi}_l^{(1)}(k, b) - \dot{\varphi}_l(k, b)\,\Phi_l^{(1)}(k, b)]/[\varphi_l(k, b)\,\dot{\Phi}_l^{(2)}(k, b) - \dot{\varphi}_l(k, b)\,\Phi_l^{(2)}(k, b)], \tag{2}$$

где $\varphi_l(k, b)$ — точное решение уравнения Шредингера в области $r \leqslant b$ и

$\dot{\varphi}_l(k,\ b)=\frac{d}{dr}\varphi_l(k,\ r)|_{r=b}$. Дифференцируя (2) по параметру b, используя уравнения Шредингера и заменяя b на r, получим

$$\frac{d}{dr}F_l(k,\ r)=-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V(r)}{k}[\Phi_l^{(1)}(k,\ r)+F_l(k,\ r)\Phi_l^{(2)}(k,\ r)]^2. \tag{3}$$

Если $\Phi_l^{(1)}(k,\ r)=j_l(kr)$ ($j_l(kr)$ — функции Бесселя и $\Phi_l^{(2)}(k,\ r)=ih_l^{(1)}(kr)$ ($h_l^{(1)}(kr)$ — функции Хенкеля), то (3) совпадает с уравнением для парциальной амплитуды [2].

Аналогично, выбирая соответствующие линейно-независимые решения $\Phi_l^{(1)}(k,\ r)$ и $\Phi_l^{(2)}(k,\ r)$, можно получить уравнения для тангенса фазы $\operatorname{tg}\delta_l(k,\ r)$, элементов S-матрицы и т. д.

В случае нелокального потенциала уравнение (3) имеет вид

$$\frac{d}{dr}F_l(k,\ r)=-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{k}[\Phi_l^{(1)}(k,\ r)+F_l(k,\ r)\Phi_l^{(2)}(k,\ r)]\int dr'V_l(r,\ r')\times$$
$$\times[\Phi_l^{(1)}(k,\ r')+F_l(k,\ r')\Phi_l^{(2)}(k,\ r')]. \tag{4}$$

Представляет интерес получить аналогичные уравнения для полной амплитуды рассеяния. Однако вышеприведенный способ непосредственно не обобщается на этот случай. Поэтому ниже рассмотрим другой подход к решению этой задачи.

Пусть потенциал взаимодействия $V(r)$ центрально несимметричный и зависит от параметра λ, т. е. $V(\lambda,\ \vec{r})$. По определению, полная амплитуда также будет зависеть от этого параметра, а именно:

$$F(\lambda,\ \vec{k}_b,\ \vec{k}_a)=-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'e^{-i\vec{k}_b\vec{r}'}V(\lambda,\ \vec{r}')\varphi_{\vec{k}_a}^{(+)}(\vec{r}',\ \lambda), \tag{5}$$

где

$$\varphi_{k_a}^{(+)}(\lambda,\ r)=e^{i\vec{k}_a\vec{r}}+\int dr'G_\lambda^{(+)}(\vec{r};\ \vec{r}')V(\lambda,\ \vec{r}')e^{i\vec{k}_a\vec{r}'} \tag{6}$$

и $G_\lambda^{(+)}(\vec{r};\ \vec{r}')$ — полная функция Грина задачи двух тел.

Дифференцируя (5) по параметру λ и используя уравнение (6) и уравнение для $\frac{d}{d\lambda}\varphi_{\vec{k}_a}^{(+)}(\lambda,\ \vec{r})$, имеем

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda,\ \vec{k}_b,\ \vec{k}_a)=-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'\left[\frac{d}{d\lambda}V(\lambda,\ \vec{r}')\right]\varphi_{\vec{k}_a}^{(+)}(\lambda,\ \vec{r}')\varphi_{-\vec{k}_b}(\lambda,\ r'). \tag{7}$$

Теперь, «обрезая» потенциал на произвольной сфере с радиусом λ и выбирая в качестве параметра эту переменную, имеем

$$\frac{d}{d\lambda}V(\lambda,\ \vec{r})=V(\vec{r})\,\delta(\lambda-r). \tag{8}$$

Подставляя асимптотику волновой функции[1]

[1] Уравнение (9) является точным решением уравнения Шредингера на сфере с радиусом λ.

$$\varphi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\lambda, n) = e^{ik\lambda\vec{n}_a\vec{n}} + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_1\, H^{(1)}(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)\, F(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a) \tag{9}$$

(где $\vec{n}_a$, $\vec{n}_b$, $\vec{n}$, $\vec{n}_1$ — единичные векторы),

$$H^{(1)}(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1) = \frac{4\pi}{k\lambda}\sum_{em}(-i)^{-l}\, Y_{em}(\vec{n})\, Y^*_{em}(\vec{n}_1)\, h^{(1)}_l(k\lambda),$$

$$F(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'\, e^{-ik\vec{n}_1\vec{r}'}\, V(\lambda, \vec{r}')\, \varphi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\lambda, \vec{r}') \tag{10}$$

и равенство (8) в (7), далее заменяя λ на r, получим

$$\frac{d}{dr}F(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}\, V(r, \vec{n})\Big\{e^{ikr\vec{n}_a\cdot\vec{n}} + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_1 H^{(1)}(kr, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)\, F(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\Big\}\times$$
$$\times\Big\{e^{-ikr\vec{n}_b\vec{n}} + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_2 H^{(1)}(kr, -\vec{n}\cdot\vec{n}_2)\, F(r, \vec{n}_2, k, \vec{n}_b)\Big\}. \tag{11}$$

Другим способом это уравнение было получено ранее в работе [4].

Если рассеяние происходит на двух потенциалах $V = V_1 + V_2$, то асимптотику волновой функции можно представить в виде

$$\Psi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\lambda, \vec{n}) = \varphi^{(+)}_{2k\vec{n}_a}(\lambda, \vec{n}) + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_1 H^{(1)}_1(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)\, F_1(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a), \tag{12}$$

где

$$H^{(1)}_1(k, \lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1) = \frac{4\pi}{k\lambda}\sum_{lm}(i)^{-l}\, Y_{em}(\vec{n})\, Y^*_{em}(\vec{n}_1)\, \chi^{(1)}_{em}(k, \lambda),$$

$$F_1(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'\, \varphi^{(-)*}_{1k\vec{n}_b}(\vec{r}')\, V_2(\lambda, \vec{r}')\, \Psi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\vec{r}'), \tag{13}$$

$\varphi^{(+)}_{2k\vec{n}_a}(\varphi^{(-)*}_{1k\vec{n}_b})$ — решение уравнения Шредингера при $V = V_1$ и $V_2 = 0$, а $\chi^{(1)}_{em}$ — решение радиального уравнения Шредингера с тем же потенциалом. Поступая аналогичным образом, получаем следующее уравнение для амплитуды:

$$\frac{d}{dr}F_1(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}V(r, \vec{n})\Big\{\varphi^{(+)}_{1k\vec{n}_a}(r, \vec{n}) + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_1 H^{(1)}_1(k, r, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)\, F_1(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\Big\}\times$$
$$\times\Big\{\varphi^{(+)'}_{1(-k\vec{n}_b)}(r, \vec{n}) + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_2 H^{(1)}_1(k, r, -\vec{n}\cdot\vec{n}_2)\, F_1(r, \vec{n}_2, k, \vec{n}_b). \tag{14}$$

Это уравнение удобно для случая, когда уравнение Шредингера с одним из потенциалов, например V_1, имеет аналитическое решение.

В случае нелокального потенциала уравнение (11) имеет вид

$$\frac{d}{dr}F(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}\Big\{e^{ikr\vec{n}_a\vec{n}} + \frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_1 H^{(1)}(kr, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)\, F(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\Big\}\int dr'\,(r')^2\int d\vec{n}'V(r, \vec{n}, r'\vec{n}')\times$$

$$\times\left\{e^{-ikr'\vec{n}_b\cdot\vec{n}'}+\frac{ik}{4\pi}\int d\vec{n}_2 H^{(1)}(kr,\ -\vec{n}\cdot\vec{n}_2)\,F(r',\ \vec{n}_2,\ k,\ \vec{n}_b)\right\}. \qquad (11')$$

Аналогично обобщается уравнение (14), когда рассеяние происходит на двух потенциалах и один из потенциалов (или оба) нелокальный.

2. Рассмотрим реакции общего типа, когда открыты каналы с перераспределением и канал развала. Для простоты изложения ограничимся примером систем трех тел и воспользуемся уравнением Фаддеева [5] в дифференциальном виде [6]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M_i}\Delta_{\vec{R}_i}-\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\Delta_{\vec{\zeta}_i}+V_i(\rho_i)-E\right]\Psi^i(\vec{K}_i,\ \vec{\rho}_i)=-V_i(\rho_i)\sum_{j\neq i=1}^{3}\Psi^j(\vec{R}_j\cdot\vec{\rho}_j).$$

$$i=1,\ 2,\ 3. \qquad (15)$$

Здесь $\Psi=\sum_{i=1}^{3}\Psi^i$ — полная волновая функция трех тел, V_i — потенциал взаимодействия между частицами j и k, R_i, ρ_i — координаты Якоби и $M_i=(m_k+m_j)\,m_i/(m_i+m_j+m_k)$, $\mu_i=m_j\,m_k/(m_j+m_k)$.

Решение этой системы удобно искать в виде

$$\Psi^i=\sum_{\alpha_i}\left\{\sum_{n_i=1}^{N_i}\chi_{n_i\alpha_i}(R_i)\,\psi_{n_i\alpha_i}+\int dk_i\chi_{k_i\alpha_i}(R_i)\,\psi_{k_i\alpha_i}\right\}, \qquad (16)$$

где

$$\psi_{n_i\alpha_i}=\varphi_{n_il_i}(\rho_i)\,Y_{L_iM_i}\left(\frac{\vec{R}_i}{R_i}\right)Y_{l_im_i}\left(\frac{\vec{\rho}_i}{\rho_i}\right)/R_i\rho_i, \qquad (17)$$

α_i — совокупность квантовых чисел $L_iM_il_im_i$, N_i — число связанных состояний в системе $(j+k)$ и $\psi_{k_i\alpha_i}$ получается из $\psi_{n_i\alpha_i}$ заменой функции $\varphi_{n_i\,l_i}$ на $\varphi_{k_i\,l_i}$, которые являются решением радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_i^2}+k_i^2-V_i-\frac{l_i(k_i+1)}{\rho_i^2}\right]\varphi_{k_i\,l_i}(\rho_i)=0 \qquad (18)$$

соответственно при $k_i^2<0$ и $k_i^2\geqslant 0$.

Для коэффициентов $\chi_{n_i\alpha_i}$ и $\chi_{k_i\alpha_i}$ разложения (16) получим систему зацепленных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2}+K_{n_i}^2-\frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right]\chi_{n_i\alpha_i}(R_i)=\frac{2M_i}{\hbar^2}\int d\Omega_{\vec{R}_i}d\rho_iR_i^2V_i\psi^*_{n_i\alpha_i}\times$$

$$\times\sum_{i\neq j=1}^{3}\sum_{\alpha_i}\left\{\sum_{n_j=1}^{N_j}\chi_{n_j\alpha_j}(R_j)\,\psi_{n_j\alpha_j}+\int dk_j\chi_{k_j\alpha_j}(R_j)\,\psi_{k_j\alpha_j}\right\}=I_{n_i\alpha_i}(R_i),$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2}+K_i^2-\frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right]\chi_{k_i\alpha_i}(R_i)=\frac{2M_i}{\hbar^2}\int d\Omega_{\vec{R}_i}d\vec{\rho}_iR_i^2V_i\psi^*_{k_i\alpha_i}\times$$

$$\times\sum_{i=j=1}^{3}\sum_{\alpha_j}\left\{\sum_{n_j=1}^{N_j}\chi_{n_j\alpha_j}(R_j)\,\psi_{n_j\alpha_j}+\int dk_j\chi_{k_j\alpha_j}(R_i)\,\psi_{k_j\alpha_j}\right\}=I_{k_i\alpha_i}(R_i),$$

где

$$K_{n_i}^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_{n_i}); \quad K_i^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_i); \cdot \quad k_i^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}\varepsilon_i. \tag{19}$$

Функции $\chi_{n_i\alpha_i}$,(K_i) и $\chi_{k_i\alpha_i}(R_i)$ регулярны в нуле и при $R_i \to \infty$ имеют асимптотику

$$\chi_{n_i\alpha_i}(R_i) = \Phi_0(R_i) + F_{n_i\alpha_i}\Phi_{n_iL_i}^2(R_i),$$
$$\chi_{k_i\alpha_i}(R_i) = F_{k_i\alpha_i}\Phi_{k_iL_i}^{(2)}(R_i), \tag{20}$$

где

$$\Phi_0(R_i) = \delta_{n_0\alpha_0 n_i\alpha_i}\Phi_{n_iL_i}^{(1)}(R_i).$$

Индексы $n_0\alpha_0$ — символа Кронекера $\delta_{n_0\alpha_0 n_i\alpha_i}$ задают квантовые числа входного канала, $\Phi_{n_iL_i}^{(1)}$, $\Phi_{n_iL_i}^{(2)}$ и $\Phi_{k_iL_i}^{(2)}$ — решения системы (19) при $I_{n_i\alpha_i}(R_i) = 0$ и $I_{k_i\alpha_i}(R_i) = 0$.

Точно так же, как в пункте 1, можно получить систему уравнений на $F_{n_i\alpha_i}$ и $F_{k_i\alpha_i}$:

$$\frac{d}{dR_i}F_{n_i\alpha_i}(R_i) = -\frac{2M_i}{\hbar^2}\frac{1}{K_{n_i}}[\Phi_0(R_i) + F_{n_i\alpha_i}(R_i)\Phi_{n_iL_i}^{(1)}(R_i)] \times$$
$$\times \sum_{j\neq i=1}^{3}\sum_{\alpha_j}\int d\Omega_{\vec{R}_i}\, d\vec{\rho}_i R_i^2 V_i \psi_{n_i\alpha_i}^* \times$$
$$\times \left\{\sum_{n_j=1}^{N_i}\psi_{n_i\alpha_i}[\Phi_0(R_j) + F_{n_j\alpha_j}(R_j)\Phi_{n_jL_j}^{(2)}(R_j)] + \int dk_j\psi_{k_j\alpha_j}F_{k_jL_j}(R_j)\Phi_{k_jL_j}^{(2)}R_j)\right\},$$

$$\frac{d}{dR_i}F_{k_i\alpha_i}(R_i) = -\frac{2M_i}{\hbar^2}\frac{1}{K_i}[F_{k_i\alpha_i}(R_i)\Phi_{k_i\alpha_i}^{(2)}(R_i)] \times$$
$$\times \sum_{j\neq i=1}^{2}\sum_{\alpha_j}\int d\Omega_{\vec{R}_i}\, d\vec{\rho}_i R_i^2 V_i \psi_{k_i\alpha_i}^* \times$$
$$\times \left\{\sum_{n_j=1}^{N_j}\psi_{n_j\alpha_j}[\Phi_0(R_j) + F_{n_j\alpha_j}(R_j)\Phi_{n_jL_j}^{(2)}(R_j)] + \int dk_j\psi_{k_j\alpha_j}F_{k_j\alpha_j}(R_j)\Phi_{k_jL_j}^{(2)}(R_j)\right\}. \tag{21}$$

Если в качестве $\Phi_{n_iL_i}^{(1)}$ и $\Phi_{n_iL_i}^{(2)}(\Phi_{k_iL_i}^{(2)})$ выбрать функции Бесселя и Ханкеля для открытых каналов $K_{n_i}^2 \geqslant 0\,(K_i^2 \geqslant 0)$ и функции Ханкеля мнимого аргумента для закрытых каналов $K_{n_i}^2 < 0\,(K_i^2 < 0)$, то в уравнении (21) $F_{n_i\alpha_i}$ имеет смысл парциальной амплитуды рассеяния прямого канала и канала с перераспределением частиц, а $F_{k_i\alpha_i}$ — парциальной амплитуды канала развала.

Для реакций общего типа получим систему уравнений для полной амплитуды рассеяния каждого канала. Для простоты рассмотрим процесс, когда на системе из двух частиц (например $(1+2)$, которая имеет только дискретный спектр) рассеивается третья частица. Этот процесс удобно описывать следующей системой уравнений:

$$\chi^{(+)}_{k_\alpha \vec{n}_a}(\vec{R}) = \delta_{\alpha_0\alpha} l^{ik_\alpha \vec{n}_a \vec{R}} + \int d\vec{R}' G^{(+)}_{k_\alpha}(\vec{R};\ \vec{R}') \sum_\beta W_{\alpha\beta}(\vec{R}') \chi^{(+)}_{k_\beta \vec{n}_a}(\vec{R}'), \tag{22}$$

где

$$W_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \int d\vec{\rho}_{12}\, \varphi_\alpha(\vec{\rho}_{12}) [V_{13}(\vec{\rho}_{13}) + V_{23}(\vec{\rho}_{23})] \varphi_\beta(\vec{\rho}_{12}), \tag{23}$$

$\varphi_\alpha(\vec{\rho}_{12})$ $(\alpha = nlm)$ — волновые функции системы $(1+2)$, V_{13}, V_{23} — соответственно потенциалы взаимодействия частиц $(3+1)$, $(3+2)$, $G_{k_\alpha}(\vec{R};\vec{R}') = \frac{2M_3}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} l^{ik_\alpha |(\vec{R}-\vec{R}')|} / (\vec{R} - \vec{R}')$ — функция Грина, $k_\alpha^2 = \frac{2\mu_3}{\hbar^2}(E - \varepsilon_\alpha)$.

Пусть коэффициенты смешивания $W_{\alpha\beta}$ зависят от параметра λ, т. е. $W_{\alpha\beta}(\lambda,\ \vec{R})$, тогда амплитуды рассеяния каждого канала также будут зависеть от этого параметра, а именно

$$F(\lambda,\ \vec{n}_b,\ k_\alpha,\ \vec{n}_a) = -\frac{2\mu_3}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d\vec{R}' e^{-ik_\alpha \vec{n}_b \vec{R}'} \sum_\beta W_{\alpha\beta}(\lambda,\ \vec{R}') \chi^{(+)}_{k_\beta \vec{n}_a}(\vec{R}'). \tag{24}$$

Дифференцируя (24) по параметру λ и используя уравнение (22) и уравнение для $\frac{d}{d\lambda} \chi^{(+)}_{k_\alpha \vec{n}_a}$, имеем

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda,\ \vec{n}_b,\ k_\gamma,\ \vec{n}_a) = -\frac{2\mu_3}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha\beta} \int d\vec{R}' \left[\frac{d}{d\lambda} W_{\alpha\beta}(\lambda,\ \vec{R}') \right] \times$$

$$\times \chi^{(+)}_{k_\alpha \vec{n}_a}(R') \chi^{(+)}_{-k_\beta \vec{n}_b}(R'). \tag{25}$$

«Обрезая» коэффициенты $W_{\alpha\beta}$ на произвольной сфере с радиусом λ и выбирая в качестве параметра эту переменную, имеем

$$\left[\frac{d}{d\lambda} W_{\alpha\beta}(\lambda,\ \vec{R}) \right] = W_{\alpha\beta}(\vec{R})\, \delta(\lambda - R). \tag{26}$$

Так же, как в пункте 1, подставляя асимптотику волновой функции в (25), используя (26) и заменяя λ на R, получаем

$$\frac{d}{dR} F(R,\ \vec{n}_b,\ R_\gamma,\ \vec{n}_a) = -\frac{2\mu_3}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha\beta} R^2 \int dn W_{\alpha\beta}(R,\ \vec{n}) \times$$

$$\times \left\{ \delta_{\alpha_0\alpha} e^{ik_\alpha R \vec{n}\cdot\vec{n}_a} + \frac{ik_\alpha}{4\pi} \int d\vec{n}_1 H^{(1)}(k_\alpha R,\ \vec{n}\cdot\vec{n}_1) F(R,\ \vec{n}_1,\ k_\alpha,\ \vec{n}_a) \right\},$$

$$\left\{ \delta_{\alpha_0\alpha} e^{-ik_\beta R \vec{n}\cdot\vec{n}_b} + \frac{ik_\beta}{4\pi} \int d\vec{n}_2 H^{(1)}(k_\beta R,\ -\vec{n}\cdot\vec{n}_2) F(R,\ \vec{n}_2, k_\beta,\ \vec{n}_b) \right\}. \tag{27}$$

В заключение отметим, что в последние годы появилось множество работ [7—8] по изучению экстремальных свойств приближенных методов теории столкновений. В этих работах показано, что широкий класс приближенных методов дает приближение снизу для K-матрицы. Подобные оценки можно получить, используя уравнение (25).

3. В этом разделе мы получим релятивистский аналог фазовых уравнений на основе релятивистских уравнений задачи двух тел в квазипотенциальном подходе [9, 10, 11].

В случае бесспиновых частиц с равными массами m[1] парциальная амплитуда рассеяния имеет вид [11]

$$F_l(k) = -\frac{1}{\mathrm{Sh}\chi_k}\int_0^\infty dr S_l^*(r, \chi_k)\widetilde{V}(r)\psi_l(k, r). \tag{28}$$

Волновая функция ψ_l удовлетворяет релятивистскому уравнению Шредингера с локальным квазипотенциалом:

$$\left[2\,\mathrm{ch}\, i\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r(r+i)}e^{i\frac{d}{dr}} - 2E_k + \widetilde{V}(r)\right]\psi_l(k, r) = 0, \tag{29}$$

$$E_k = \sqrt{1+\vec{k}^2} \equiv \mathrm{ch}\,\chi_k,\ k = \mathrm{Sh}\chi_k,$$

а $S_l(r, \chi_k)$ — решение свободного уравнения (29) с $\widetilde{V}(r) = 0$.

Переписывая (29) в интегральном виде и используя метод, развитый в разделе 1 при выводе уравнений на полные амплитуды рассеяния, получим окончательно релятивистский аналог уравнения (3):

$$\frac{d}{dr}F_l(kr) = -\frac{\widetilde{V}(r)\gamma_j(r)}{\mathrm{Sh}\chi_k}\left[S_l(r, \chi_k) + F_l(kr)e_l^{(1)}(r, \chi_k)\right]^2. \tag{30}$$

Здесь S_l и $e_l^{(1)}$ — аналоги сферических функций Бесселя и Ханкеля первого рода, явный вид которых есть

$$S_l(r, \chi_k) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\chi_k}\,(i)^{l+1}\frac{\Gamma(ir+l+1)}{\Gamma(ir)}P_{ir-\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\chi_k),$$

$$e_l^{(1)}(r, \chi_k) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\chi_k}\,(i)^{l+1}\frac{\Gamma(ir+l+1)}{\Gamma(ir)}Q_{-ir-\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\chi_h),$$

$$\gamma_l(r) = \frac{(-1)^{l+1}\,\Gamma(ir+l+1)\,\Gamma(ir)}{\Gamma(ir+l+1)\,\Gamma(-ir)},$$

а P_ν^μ и Q_ν^μ — функции Лежандра первого и второго рода.

Так как в релятивистском пределе ($r \gg 1$, $\chi_k \ll 1$)

$$S_l(r, \chi_k) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}\,kr}\,I_{l+\frac{1}{2}}(kr),\quad e_l^{(1)}(r, \chi_k) \to -i\sqrt{\frac{\pi}{2}\,kr}\,H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr),$$

то уравнение (30) переходит в (3).

Точно таким же способом обобщаются уравнения (4), (11), (11′), (14), полученные в первом разделе. Метод линеаризации [2], удобный для нахождения приближенного решения уравнения (3), можно непосредственно применить к уравнению (30). Таким образом, выбирая феноменологические квазипотенциалы, можно получать информацию о высокоэнергетическом рассеянии адронов.

---

[1] Будем работать в системе $\hbar = c = m = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero F. Variable Phase Approach to Potential Scattering Acad. Press. N. Y., 1967.
2. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., 1968.
3. Матвеенко А. В., Пономарев Л. И. Препринт ОИЯИ, Р4-5608, 1971.
4. Бабиков В. В., Мир-Касимов Р. М. Препринт ОИЯИ, Е2-4861, 1969.
5. Фаддеев Л. Д. ЖЭТФ, **39**, 1459, 1960.
6. Амирханов Л. Д., Гречко В. Е., Титов А. И. «Вестн. Моск. ун-та», **11**, № 5, 579, 1971.
7. Hahn Y., O'Malley T. E. Spruch. Phys. Rev., **134**, B397, 1964.
8. Захарьев Б. Н., Пермяков В. П., Фенин Ю. Н. Препринт ОИЯИ, Р4-5332, 1970; Гайлитис М. ЖЭТФ, **47**, вып. 1 (7), 160, 1964.
9. Логунов А. А., Тавхелидзе А. Н. Nuovo Cimento, **29**, 380, 1963.
10. Кадышевский В. Г. Nucl. Phys., **B6**, 125, 1968.
11. Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М., Фриман М. Препринт ОИЯИ, Р2-4107, 1968.

Поступила в редакцию
7.12 1971 г.

НИИЯФ