Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1973

УДК 531.51

С. Л. ГАЛКИН

О ВОЗМОЖНОСТИ ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ, СТАТИЧЕСКИХ ПОЛИЦЕНТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

В связи с решением Керзона и некоторыми другими высказывается мысль, что два сколлапсировавших объекта не будут притягиваться.

Метод исследования статических гравитационных полей с осевой симметрией, принадлежащий Вейлю и Леви-Чивита [1, 2], позволяет получить ряд статических решений с двумя и более гравитирующими центрами. Действительно, оказывается возможным рассматривать интервал [3] в виде

$$ds^2 = e^{2\lambda}c^2dt^2 - e^{-2\lambda}\left[e^{2\nu}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2\right], \tag{1}$$

где $\lambda = \lambda(\rho, z)$, $\nu = \nu(\rho, z)$, и тогда уравнения Эйнштейна для пустого пространства сводятся к следующим:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial\rho} = \rho\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right], \qquad \frac{\partial\nu}{\partial z} = 2\rho\,\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\,\frac{\partial\lambda}{\partial z}, \tag{3}$$

причем (2) есть условие интегрируемости (3). Если $\lambda(\rho, z)$ регулярна в полуплоскости $\rho > 0$, то $\nu(\rho, z)$ определяется в этой области однозначно, что сразу следует из формулы Грина. Таким образом, любое решение (2) в принципе уже дает решение для метрики (1), так как (3) сводится тогда к квадратурам [1, 4], не всегда, впрочем, выполнимым в известных функциях.

Простейшее решение (2) и (3)

$$\lambda = -\frac{m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \qquad \nu = -\frac{m^2\rho^2}{2(\rho^2 + z^2)^2} \tag{4}$$

не является решением Шварцшильда (оно обладает только осевой симметрией, но не сферической). Чтобы решение Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

(статическое и обладающее осевой симметрией) привести к виду (1), сделаем преобразование $\rho = r\sin\theta\sqrt{1-\frac{2m}{r}}$, $z = r\cos\theta\left(1-\frac{m}{r}\right)$, $r > 2m$ [5, 6]. Тогда получим

$$\lambda = \ln\frac{u}{m+\sqrt{m^2+u^2}}, \qquad \nu = \frac{1}{2}\ln\frac{u^4}{u^4+m^2\rho^2}, \tag{5}$$

$$u^2(\rho, z, m) = \frac{1}{2}\left(\rho^2+z^2-m^2+\sqrt{(\rho^2+z^2-m^2)^2+4m^2\rho^2}\right), \quad u>0,$$

причем сфера Шварцшильда $r=2m$ изображается теперь отрезком $-m\leqslant z\leqslant m$, $\rho=0$ (при условии $u=0$).

Из моноцентрических решений (4) и (5) можно получить и другие моноцентрические, поскольку $\partial^k\lambda/\partial z^k$ также является решением (2); но в настоящей работе будут обсуждаться другие обобщения решений (4) и (5). Именно линейность (2) позволяет при помощи суперпозиции обобщить решения на случай двух и более гравитирующих центров (бицентрических и полицентрических).

Для (4) это решение Керзона [3, 7]

$$\lambda = -\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2} \qquad \text{где} \quad r_i^2 = \rho^2+(z-z_i)^2,$$

$$\nu = -\frac{m_1^2\rho^2}{2r_1^4}-\frac{m_2^2\rho^2}{2r_2^4}+\frac{2m_1m_2}{(z_1-z_2)^2}\left[\frac{\rho^2+(z-z_1)(z-z_2)}{r_1r_2}-1\right] \tag{6}$$

(обобщение на произвольное число центров тривиально). Для (5) придем к обобщенному решению, положив

$$\lambda = \sum_i \ln\frac{u_i}{m_i+\sqrt{m_i^2+u_i^2}}, \qquad u_i = u(\rho, z-z_i, m_i), \tag{7}$$

хотя получить $\nu(\rho, z)$ в явном виде вряд ли возможно. (В [6] неправильно трактуется принцип соответствия, и потому указанное там решение не является обобщением решения Шварцшильда.)

Кроме сингулярностей в «точках» (в топологическом смысле они не являются точками) $r_1=0$ и $r_2=0$ (для (6)) и в областях $u_i=0$ (для (7)) полицентрические решения обладают еще одной особенностью на отрезке между «частицами» [3]. Так как здесь $\nu(0, z)\neq 0$, отношение длины бесконечно малой окружности с центром на оси z к ее диаметру не стремится к π, хотя сама длина окружности стремится к нулю. Еще не зная об этой особенности решения (6), Эйнштейн объявил его нефизическим [8, стр. 425] (как статическое с двумя притягивающими центрами, не удерживаемыми от сближения «подпоркой») и объяснил это невозможностью в полевой теории представлять тела сингулярностями поля. Позже Эйнштейн узнал об указанной особенности [8, стр. 434], и, по-видимому, именно это обстоятельство позволило ему в дальнейшем существенно изменить свою точку зрения. При выводе уравнений движения из уравнений поля [8, стр. 451] Эйнштейн с сотрудниками представляли тела сингулярностями поля. Такая эволюция взглядов автора ОТО представляет сама по себе интерес; однако данная работа посвящена анализу на первый взгляд очевидного утверждения Эйнштейна о том, что два гравитирующих центра обязаны сближаться. В теории Ньютона это действительно так, но в ОТО такой вопрос остается до сегодняшнего дня открытым. В данной работе мы обсудим случай, когда такое утверждение или просто неверно или по крайней мере, спорно.

По всей видимости, уравнения движения в ОТО действительно следуют из уравнений поля, однако совершенно неясно, каковы они в общем случае, включающем в себя не только произвольные скорости тел, но и произвольные (допустимые) их размеры. Действительно, в работе [9] при выводе уравнений движения из уравнений поля явно используется не только условие $v/c \ll 1$, но и в одинаковой степени условие $\varphi/c^2 \ll 1$, где φ — ньютоновский потенциал внутри тела. Неявно последнее условие используется и в выводе Эйнштейна [8, стр. 451]. Хотя тела и рассматриваются как точки, это означает лишь, что размеры тел пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями между ними, но не по сравнению с их собственными гравитационными радиусами (в теории Ньютона нет ограничивающей фундаментальной скорости и потому не появляется характерная длина — гравитационный радиус). Так как пространство всюду почти плоское, удается линеаризовать уравнения поля и рассматривать их решения как сумму внутреннего (поле самого тела) и внешнего (поле других тел), причем в окончательных результатах размеры тел уже не фигурируют, что и позволяет считать их точками. Сильное же поле не допускает такого разделения и формальная сумма внутреннего и внешнего решений (полученных поочередным рассмотрением поля одного тела и поля других тел в его отсутствие) заведомо не является решением уравнений поля. Получается что-то вроде экранировки в нелинейной теории поля сильным полем слабого: например, из (7) следует, что $g_{00} = e^{2\lambda} \to 0$ лишь только одно из $u_i \to 0$. Иными словами, неучет структуры самого тела означает априорное задание взаимодействия последнего с «внешним» полем. Причем это взаимодействие задавалось до сих пор фактически так же, как и в теории Ньютона [10].

Такой подход оказывается возможным, если размеры тел много больше их собственного гравитационного радиуса, так как в этом случае ОТО приводит к малым отклонениям от теории Ньютона. Если же размеры тел близки к их гравитационному радиусу, различие между теорией Ньютона и ОТО становится в высшей степени существенным. Действительно, в теории Ньютона неограниченное уменьшение размеров тела (коллапс в ньютоновой теории) никак не сказывается на взаимодействии этого тела с внешним гравитационным полем. Как раз только такой предельный случай «точечного тела» рассматривается в известной проблеме многих тел теории Ньютона. Напротив, явление релятивистского коллапса гораздо сложнее [11] и приводит, как известно, к тому, что для удаленного наблюдателя коллапсирующее тело никогда не сожмется в точку. Особый интерес представляет осуществляющаяся в пределе остановка течения времени на поверхности неограниченно коллапсирующего тела, так что ни одна пробная частица и вообще ни один внешний сигнал не могут достигнуть его поверхности. Отсюда следует невозможность внешнего воздействия на такое тело, в том числе, по-видимому, и на его движение. (Все рассуждения проводятся для системы отсчета удаленного наблюдателя, собственное время которого совпадает с координатным.) Но если пробная частица бесконечно долго падает на сколлапсировавшее тело, то она бесконечно долго падает и на каждое из двух сколлапсировавших тел, движущихся навстречу друг другу, так, что рассматриваемая частица находится между ними.

Отсюда следует парадоксальный вывод: два сближающихся по прямой тела могут никогда не столкнуться, причем не за счет сил отталкивания! Почти очевидно, что соответствующая нестационарная метрика в пределе стремится к метрике (7), если $|z_1-z_2|=m_1+m_2$. Если тела не полностью сколлапсировали, то время до момента столкновения конечно, но может быть сколь угодно большим. Таким образом, оказывается, что характер движения зависит еще и от размеров тел, а не только от их масс, как в теории Ньютона. Уже этот пример показывает, насколько сильно отличается движение тел в ОТО от движения в теории Ньютона не только для больших скоростей (здесь скорости могут быть вполне нерелятивистскими), но и для сильных полей тяготения.

В связи с решением (7) можно указать: два полностью сколлапсировавших тела в начальный момент покоятся. Вовсе не очевидно, что в дальнейшем они будут сближаться. Скорее наоборот, так как «время воздействия» одного тела на другое равно бесконечности. В терминах ньютоновой механики инертная масса сколлапсировавшего тела бесконечна. Отсюда непосредственно следует, что сколлапсировавшие звезды должны покидать Галактику, так как не будут увлекаться ее полем (вероятно, по траектории, похожей на траекторию изотропной геодезической). Кроме того, если в системе двойной звезды один компонент сколлапсирует, его движение не будет определяться полем другой звезды, но не наоборот: т. е. двойная звезда станет двигаться в той системе отсчета, в которой раньше она покоилась.

Приведенные рассуждения показывают, что представление тел при помощи сингулярностей поля в рамках ОТО противоречит нашим знаниям о коллапсе (релятивистском), и в этом смысле можно считать бесперспективными поиски решения проблемы двух тел, как точного решения уравнений поля с двумя сингулярностями, так как в общерелятивистской проблеме движения весьма существен параметр $a=r_g/R$ (где r_g и R — гравитационный и собственный радиусы тела). К настоящему времени сравнительно подробно исследован лишь случай $a\ll 1$, хотя и здесь нет единого мнения [3]. До конца задача вывода уравнений движения из уравнений поля решена лишь для пылевидной среды и, пожалуй, для пробного тела [3, 9]. Открытие пульсаров делает актуальной задачу исследования движения тел, для которых $a \lessapprox 1$.

Таким образом, нельзя отвергать в ОТО статические решения с несколькими гравитирующими центрами только на том основании, что они статические. Правда, известные решения такого типа обладают еще одной, указанной выше, особенностью, которая в ОТО, по-видимому, еще не исследовалась. Возможно, что она появляется вследствие пренебрежения влиянием поля одного тела на форму другого. Во всяком случае, $|v(0, z)|$ не зависит от знаков m_i, так что остроумная попытка Бонди [12] рассматривать массы разных знаков не может устранить указанную особенность. Возможно также, что эта особенность просто указывает на очевидное существование в общем случае «подпорки».

При переходе к решению Керзона мы затрагиваем нерешенный до конца вопрос об источнике решения (4). Можно предложить модель, основанную на следующих соображениях. Если в теории Ньютона предельное поле сколлапсировавшего тела (поле «материальной точки») никак не зависит от характера симметрии или асимметрии допредельного, вообще говоря нестационарного, поля, в ОТО ситуация сложнее: предельное поле сколлапсировавшего тела должно зависеть от того, как протекает процесс коллапса.

Рассмотрим пылевое облако массы M, имеющее форму эллипсоида вращения, очень сильно сплющенного вдоль оси z («тонкий блин»), и выделим в нем условно сферу радиуса $r_g=2\gamma M/c^2$, центр которой совпадает с центром облака. Очевидно, она не является сферой Шварцшильда, поэтому сжатие облака будет продолжаться и после того, как его толщина станет меньше $2r_g$. Ввиду отсутствия давления сжатие удаленной от центра части облака уже не может привести в дальнейшем к распределению вещества, соответствующего решению Шварцшильда. А так как существует точное решение (4), переходящее в решение Шварцшильда на больших расстояниях и имеющее особенность только при $z=0$ (а не на отрезке $-m\leqslant z\leqslant m$), естественно предположить, что оно и описывает предельное поле указанного сколлапсировавшего облака (при некотором начальном распределении скоростей в облаке). Данная модель может представлять только теоретический интерес, в связи со статическим решением Керзона. Здесь также возникает временной барьер, только значительно более сложной формы.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что затронутые в статье вопросы имеют самое непосредственное отношение к важнейшей задаче астрофизики: поискам «черных дыр». В настоящее время предполагается, что движение таких объектов описывается квазиньютоновыми уравнениями, однако для этого нет никаких оснований. Скорее следует ожидать другого: во-первых, число таких объектов в Галактике может оказаться меньше, чем ожидается; во-вторых, если такой объект входит в систему двойной звезды, то движение последней может сильно отличаться от движения обычной двойной звезды. Например, отношение масс компонентов, вычисленное обычным способом по наблюдениям, может оказаться совершенно неожиданным, например равным нулю (или бесконечности).

Автор признателен В. А. Фоку за внимание к работе и обсуждение проблемы движения в ОТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weyl. Ann. d. Phys., 54, 117, 1917; 59, 185, 1919.
2. Levi-Civita. Rend. Acc. Lincei, Sev., No. 1918—1919.
3. Синг. Общая теория относительности. М., 1963.
4. Chazy I. Bull. Soc. Math. France., 52, 17, 1924.
5. Erez G., Rosen N. Bull. Res. Council Jsr., F8, 47, 1959.
6. Кайгородов В. Р. Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5. Казань, 1968.
7. Curson H. E. I. Proc. Lond. Math. Soc., 23, 1924.
8. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 2. М., 1965—1967.
9. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
11. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., 1967.
12. Bondi H. Rev. Mod. Phys., 29, 423—428, 1957.

Поступила в редакцию
6.12 1971 г.

ГАИШ