Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1973

УДК 533.9.01

М. А. ЯКОВЛЕВ

О КИНЕТИКЕ ИОНИЗАЦИОННЫХ ВОЛН

Исследуется поведение слабоионизованной плазмы положительного столба после возмущений гармонического и импульсного характера. Найден явный вид и определены фазовые сдвиги возникающих волн. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментом.

Распространению малых продольных возмущений в слабоионизованной плазме положительного столба в связи с ионизационной неустойчивостью посвящено много работ [1—4]. Экспериментально установлено, что при распространении ионизационных волн имеются фазовые сдвиги между колебаниями электрического поля, однако концентрации и температуры электронов (см. например, [5, 6]) по существу теоретически не рассматривались. Теоретическая часть [5], в частности, носит оценочный характер. Автор [5], исходя из упрощенной системы (отсутствует уравнение баланса электронной энергии, а также не учитывается зависимость скорости ионизации от температуры), анализирует только один вариант начального возмущения — гармоническое. Кроме того, в этой работе не получено явного выражения для фазовых смещений, а приведена лишь численная оценка для сдвига фаз между колебаниями электрического поля и концентрации электронов.

В нашей работе найден явный вид для фазовых смещений возникающих волн как в случае гармонического начального возмущения, так и в случае импульсного.

Исходная система уравнений, которой описывается слабоионизованная плазма в диффузионном режиме, в одномерном приближении имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} n_e b_e \left(E + \frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) = z n_e - \frac{n_e}{\tau}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n_p b_p E = z n_e - \frac{n_p}{\tau}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{3}{2} n_e T - \frac{\partial}{\partial x} \frac{3}{2} n_e T b_e \left(E + \frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) -$$

$$- a n_e b_e T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - n_e b_e \left(E + \frac{T}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) E + n_e H = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e (n_p - n_e). \tag{4}$$

Здесь n_e и n_p, b_e и b_p — соответственно концентрация и подвижность электронов и положительных ионов, z — скорость ионизации на один электрон, τ — время жизни заряженных частиц по отношению к уходу на стенку, E — электрическое поле, T — электронная температура (b), H — скорость энергетических потерь электронного газа за счет упругих и неупругих столкновений, a — безразмерный коэффициент теплопроводности (порядка единицы), e — элементарный заряд. Положительное направление — анод — катод. Исходная система имеет точное решение — стационарное и пространственно-однородное.

Линейное приближение для изменений концентрации, температуры и электрического поля (вблизи стационарного пространственно-однородного распределения) имеет вид:

$$E_0 \frac{\partial \widetilde{n}_e}{\partial x} + T_0 \frac{\partial^2 \widetilde{n}_e}{\partial x^2} - 4\pi n_0 \widetilde{n}_e + 4\pi e n_0 \widetilde{n}_p = 0, \tag{5}$$

$$(4\pi e n_0 b_p + z_0) \widetilde{n}_e - \frac{\partial \widetilde{n}_p}{\partial t} - b_p E_0 \frac{\partial \widetilde{n}_p}{\partial x} -$$

$$- \left(4\pi e n_0 b_p + \frac{1}{\tau_0}\right) \widetilde{n}_p - z_0 (z_T - 1) \widetilde{T} = 0, \tag{6}$$

$$6\pi e n_0 T_0 \widetilde{n}_e - \frac{5}{2} E_0 T_0 \frac{\partial \widetilde{n}_e}{\partial x} - \frac{3}{2} T_0 \frac{\partial^2 \widetilde{n}_e}{\partial x^2} - 2E_0^2 \widetilde{E} -$$

$$- 6\pi e n_0 T_0 \widetilde{n}_p - \frac{3}{2} E_0 T_0 \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x} - a T_0^2 \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

$$E_0 \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial x} = 4\pi e n_0 (\widetilde{n}_p - \widetilde{n}_e). \tag{8}$$

Тильдой обозначены малые переменные добавки, отнесенные к невозмущенным значениям соответствующих величин, имеющих индекс 0; $z_T = \left.\frac{\partial \ln z}{\partial \ln T}\right|_{T=T_0}$.

При получении линеаризованной системы (5)—(8), во-первых, пренебрегаем членами порядка $b_p/b_e \ll 1$, а также зависимостью от температуры скорости энергетических потерь H и коэффициента электронной подвижности d_e; и, во-вторых, процесс установления электронной концентрации и температуры считаем квазистационарным, поскольку для ионизационных волн с частотами $\omega \sim 10^4$—10^5 *сек*$^{-1}$ и длинами волн $2\pi/\kappa \sim 1$—10 *см* в условиях положительного столба достаточно строго выполняются условия

$$\left| \frac{\frac{\partial n_e}{\partial t}}{D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial x}} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\varkappa_e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \right| \ll 1. \tag{9}$$

Здесь $D_e = b_l T_0$ и $\varkappa_e = a b_e T_0$ — соответственно коэффициенты диффузии и теплопроводности электронного газа (в положительном столбе с температурой электронов $T_0 \sim 1b$ и концентрацией нейтральных частиц $n_g \sim 10^{16}$ *см*$^{-3}$, величины D_e и $\varkappa_e \sim 10^7$ *см*^{2}/*сек*).

Решение системы уравнений (5)—(8) проводим последовательным применением преобразований Фурье по координате и Лапласа по времени ко всем неизвестным системам:

$$f_k(k,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ t)\, e^{-ikx}, \tag{10}$$

$$f(k,\ s) = \int\limits_{0}^{\infty} f_k(k,\ t)\, e^{-st}\, dt. \tag{11}$$

Здесь комплексная переменная $s = i\omega + \sigma$, f — общее обозначение неизвестных системы (5)—(8).

Решая полученную после преобразования (10)—(11) неоднородную систему алгебраических уравнений (будем называть ее системой (*)) и проводя обратное преобразование Лапласа, имеем

$$f_k(k,\ t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_e - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{\Delta_f(k,\ s)}{\Delta(k,\ s)}\, e^{st}\, ds, \tag{12}$$

где σ_i выбирается так, чтобы все особые точки подынтегральной функции лежали левее прямой $\mathrm{Re}s = \sigma_1$; $\Delta(k,\ s)$ — детерминант системы (*); $\Delta_f(k,\ s)$ — детерминант, получающийся из $\Delta(k,\ s)$ при замене столбца коэффициентов при неизвестном f на столбец свободных членов (будем называть его столбцом c_f).

Интеграл (12) находим с помощью теории вычетов, контур интегрирования замыкаем в левой полуплоскости. Полюса подынтегрального выражения находятся из уравнения

$$\Delta(k,\ s) = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) совпадает с дисперсионным уравнением из [1 и 2]. Уравнение (13) имеет решение

$$S = S(k) = -i\,\frac{\xi_0 z_0}{ak}(z_T - 1) - b_p T_0 k^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\xi_0^2 z_0}{k^2}(z_T - 1). \tag{14}$$

Здесь

$$\xi_0 = \frac{E_0}{T_0}. \tag{15}$$

Тогда интеграл (12) с учетом дисперсионного соотношения (14) принимает значение

$$f_k(k,\ t) = \frac{\Delta_f[k,\ s(k)]}{\left[\frac{\partial}{\partial s}\Delta(k,\ s)\right]_{s=s(k)}}\, e^{s(k)t}. \tag{16}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (16), окончательно получаем

$$f(x,\ t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_f[k,\ s(k)]}{\left[\frac{\partial}{\partial s}\Delta(k,\ s)\right|_{s=s(k)}} \exp\{ikx + S(k)\,t\}\, dk. \tag{17}$$

Найдем решение системы уравнений (5)—(8) для двух частных случаев (для конкретности рассмотрим колебания концентрации ионов).

Гармоническое возмущение. Начальное условие имеет вид

$$n_p(x, 0) = A_0 e^{ik_0x} \tag{18}$$

(A_0 — безразмерный вещественный коэффициент).

Подставляя Фурье-образ начального условия (18) в (17), получаем

$$\widetilde{n}_p(x, t) = A_0 \,|\, B_p(k_0) \,|\, \exp\{ik_0x + s(k_0)t + \varphi_p(k_0)\}. \tag{19}$$

Здесь

$$B_p(k_0) = \frac{\Delta_p^*(k_0)}{\left[\frac{\partial}{\partial s}\Delta(k, s)\right]_{s=s(k_0)}}, \quad \varphi_p(k_0) = \arg B_p(k_0), \tag{20}$$

Δ_p^* — алгебраическое дополнение детерминанта Δ_p к первому элементу столба c_p (остальные элементы этого столбца равны нулю).

Формулы (19) и (20) дают вид решения и для остальных неизвестных систем уравнений (5)—(8) при замене индекса p на T, E и e.

Итак, при гармоническом начальном возмущении получаем плоские волны, распространяющиеся к катоду с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \frac{\xi_0 z_0 (z_T - 1)}{a k_0^2} \tag{21}$$

и с коэффициентом затухания

$$\sigma(k_0) = -b_p T_0 k_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\xi_0^2 z_0}{k_0^2}(z_T - 1). \tag{22}$$

Импульсное возмущение. При начальном условии

$$\widetilde{n}_p(x, 0) = A_0 \delta(x) \tag{23}$$

Фурье-образ начального возмущения равен

$$\widetilde{n}_{pk}(k, 0) = A_0. \tag{24}$$

Для того чтобы найти интеграл (17), учтем, что коэффициент затухания, согласно (14), имеет резкий минимум при

$$k = k_1 = \left[\frac{1}{2}\,\frac{z_0 \xi_0^2 (z_T - 1)}{b_p T_0}\right]^{1/4}. \tag{25}$$

Члены, у которых волновое число заметно отличается от k_1, сильно затухают и дают малый вклад в интеграл. Функции, входящие в экспоненту, раскладываем в ряд по степеням $(k - k_1)$. Затем, переходя к комплексной переменной и используя метод перевала, получаем асимптотическое выражение для интеграла (17):

$$\widetilde{n}_p(x, t) = W(x, t)\left[\sqrt{\frac{1}{4\pi\,|Q|\,t}} + 0\left((|Q|\,t)\right)^{-3/2}\right]\exp\{i\Phi(x, t)\}. \tag{26}$$

Здесь

$$W(x, t) = A_0 \, | B_p(k_1) | \exp \left\{ \sigma(k_1) t - \frac{(x + \omega'_{k_1} t)^2}{4qt} \right\}, \tag{27}$$

$$\Phi(x, t) = k_1 x + \omega(k_1) t + \frac{(x + \omega'_m t)^2}{4ht} + \varphi_p(k_1) - \frac{1}{2} \psi. \tag{28}$$

$$g = - \frac{\omega''^2_{k_1} + \sigma''^2_{k_1}}{2\sigma''_{k_1}}, \quad h = - \frac{\omega''^2_{k_1} + \sigma''^2_{k_1}}{2\omega''_{k_1}}, \tag{29}$$

$$Q = - \frac{1}{2} (\omega''_{k_1} + i\sigma''_{k_1}) \quad \psi = \arg Q,$$

$$\omega'_{k_1} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k}, \quad \sigma'_{k_1} = \left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k=k_1}.$$

B_p и φ_p в (27) и (28) определяются выражением (20), как и в случае гармонического возмущения с аргументом k_1. При замене индекса p в равенствах (26)—(29) последовательно на индекс T, E и e получаем вид возмущений электронной температуры, электрического поля и концентрации электронов.

Полученные результаты (19) и (26) дают возможность определить фазовые сдвиги между колебаниями соответствующих величин. В частности, фазовые смещения между колебаниями концентрации ионов и электронной температуры и колебаниями температуры и электрического поля (как в случае гармонического возмущения, так и в случае импульсного) определяются соответственно формулами

$$\varphi_p(k) - \varphi_T(k) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{2(3\xi_0^2 + k^2)}{\xi_0 k}, \tag{30}$$

$$\varphi_T(k) - \varphi_E(k) = \operatorname{arctg} \frac{\xi_0 k^2 + 6\xi_0^3}{7\xi_0^2 k + 2k^3}.$$

Сравнение фазовых сдвигов, полученных по формуле (30), с экспериментом проведено в таблице.

Источник	Среднее электрическое поле (*в/см*)	Средняя температура (*в*)	Длина волны (*см*)	Фазовый сдвиг*		Фазовый сдвиг**	
				эксперимент	по формуле (30)	эксперимент	по формуле (30)
[5]	2,8	7,2	6	90	98	18	13
[6]	1,2	8	10	90	96	10	8

* Между колебаниями концентрации и температуры.
** Между колебаниями температуры и электрического поля.

Приведенная теория дает следующий порядок следования колебаний в направлении движения ионизационной волны: электрическое поле, температура электронов и далее практически совпадающие по фазе колебания концентрации электронов и ионов, что соответствует данным работ [5 и 6].

Автор благодарен А. А. Зайцеву за ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wojaczek K. Beitr. Plasmaphys., **5**, 319, 1966.
2. Цендин Л. Д. ЖТФ, **39**, 1341, 1969.
3. Wojaczek K. Beitr. Plasmaphys., **2**, 49, 1962.
4. Недоспасов А. В., Пономаренко Ю. Б. ТВТ, **3**, 17, 1965.
5. Gundermann S. Beitr. Plusmaphys., **9**, 325, 1969.
6. Rayment S. W., Twiddy N. D. Proc. 9 th. Intern. Conf. P. I. G. Bucharest, 1969.

Поступила в редакцию
5.1 1972 г.

Кафедра
теоретической физики