Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1973

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 537.312.62

П. С. ЛАНДА, Н. Д. ТАРАНКОВА

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ТОКА ДЖОЗЕФСОНА

В данной работе рассматриваются флуктуации амплитуды собственно джозефсоновского тока, которые связаны с дискретностью заряда и диссипацией, возникающей при туннелировании куперовских пар через переход сверхпроводник — диэлектрик — сверхпроводник. В отличие от предыдущих работ [1—3], посвященных флуктуациям сверхпроводящего туннельного тока, рассматриваемые флуктуации не исчезают при стремлении сопротивления внешней цепи к нулю. Поэтому для рассмотрения этих флуктуаций достаточно предположить, что переход замкнут на источник э. д. с. с нулевым внутренним сопротивлением. Учет внешнего сопротивления можно привести в конечных результатах.

Исходным является известное выражение для туннельного тока (см., например, [4]):

$$I_T = -ie\sum_{pq\sigma}\left[T_{pq}a^{+}_{p\sigma}(t)\,b_{q\sigma}(t) - \text{э. с.}\right], \tag{1}$$

где $a^{+}_{p\sigma}(t)$, $b^{+}_{q\sigma}(t)$ — гейзенберговские операторы рождения электронов в «правом» и «левом» сверхпроводниках соответственно.

Аналогично тому, как это делается в работе Свидзинского и Слюсарева [5], в целях удобства расчета перейдем от оператора $a_{p\sigma}$, $b_{q\sigma}$ к операторам квазичастиц $\alpha_{p\sigma}$, $\beta_{q\sigma}$. Эти операторы связаны между собой каноническим преобразованием Боголюбова:

$$a_{p\sigma}\,e^{i\frac{\varphi_1}{2}} = U_p\alpha_{p\sigma} + (\operatorname{sign}\sigma)\,v_p\alpha^{+}_{-p-\sigma},$$

$$b_{q\sigma}\,e^{i\frac{\varphi_2}{2}} = Uq\beta_{q\sigma} + (\operatorname{sign}\sigma)vq\beta^{+}_{-q-\sigma}, \tag{2}$$

Здесь $\varphi_{1,2}$ — фазы волновой функции в «левом» и «правом» сверхпроводниках, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d\varphi_{1,2}}{dt} = 2\mu_{1,2}, \tag{3}$$

где $\mu_{1,2}$ — химические потенциалы.

Тогда в первом порядке теории возмущений выражение для туннельного тока приобретает вид

$$I_T = -ie\sum_{pq\sigma}\{T_{pq}\,[U_pU_q j_{pq\sigma} + U_pv_q(\operatorname{sign}\sigma)\,r^{*}_{-p-q-\sigma} +$$

$$+ Uqvp(\operatorname{sign}\sigma)\,r_{qp\sigma} + vpvqj^{*}_{-p\,|\,q-\sigma}]\,e^{i\frac{\varphi}{2}} - \text{э. с.}\}. \tag{4}$$

Здесь введены обозначения: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,

$$j_{pq\sigma} = \alpha^{+}_{p\sigma}\beta_{q\sigma}; \qquad r_{pq\sigma} = \alpha_{-p-\sigma}\beta_{q\sigma}; \tag{5}$$

$$j^*_{-p-q-\sigma} = \alpha_{-p-\sigma}\,\beta^+_{-q-\sigma}; \qquad r^*_{-p-q-\sigma} = \alpha^+_{p\sigma}\,\beta^+_{-q-\sigma}\ .$$

Для введенных переменных можно записать уравнения

$$\frac{dj_{pq\sigma}}{dt} = i\,(E_p - E_q)\,j_{pq\sigma} - \varepsilon j_{pq\sigma} - iT^*_{pq}\,(n_p - m_q)(UpUq\,e^{-i\frac{\varphi}{2}} + vpvq\,e^{i\frac{\varphi}{2}}),$$

$$\frac{dr_{pq\sigma}}{dt} = -\,i\,(E_p + E_q)\,r_{pq\sigma} - \varepsilon r_{pq\sigma} - iT^*_{pq}\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,(1 - n_p - m_q)\,\times$$

$$\times\,(vpUq\,e^{-i\frac{\varphi}{2}} - Upvq\,e^{i\frac{\varphi}{2}}), \tag{6}$$

$$\frac{dj^*_{-p-q-\sigma}}{dt} = -\,i\,(E_p - E_q)\,j^*_{-p-q-\sigma} - \varepsilon j^*_{-p-q-\sigma} + iT^*_{pq}\,(n_p - m_q)\,\times$$

$$\times\,(UpUq\,e^{i\frac{\varphi}{2}} + vpvq\,e^{-i\frac{\varphi}{2}}),$$

$$\frac{dr^*_{-p-q-\sigma}}{dt} = i\,(E_p + E_q)\,r^*_{-p-q-\sigma} - \varepsilon r^*_{-p-q-\sigma} + iT^*_{pq}\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,(1 - n_p -$$

$$- m_q)\,(vpvq\,e^{i\frac{\varphi}{2}} - Upvq\,e^{-i\frac{\varphi}{2}}).$$

Здесь $E_{p,q} = \sqrt{\zeta^2_{p,q} + \Delta^2_{p,q}}$, $\quad \zeta_{p,q} = \frac{p^2\,(q^2)}{2m} - \mu_{1,2}$, $\quad \Delta_{p,q}$ — ширина энергетической щели «левого» и «правого» сверхпроводников,

$$n_p = \langle \alpha^+_{p\sigma}\,\alpha_{p\sigma} \rangle P, \qquad m_q = \langle \beta^+_{q\sigma}\,\beta_{q\sigma} \rangle P$$

равновесные значения числа квазичастиц слева и справа.

В отличие от работы [5] в (6) явно введены члены с параметром ε, описывающие диссипацию куперовских пар. В данной работе эти члены введены феноменологически, однако их можно строго получить путем усреднения исходной системы уравнений по быстрым флуктуациям аналогично тому, как это сделано Климонтовичем в [6]. В уравнениях (6) параметр ε предполагается одинаковым для всех уравнений, хотя это предположение не принципиально.

Туннельный ток (4) удобно представить в виде суммы собственно джозефсоновского тока и квазичастичного тока J_{kb}:

$$I_T = -\,i\,[\tilde{j}_J\,e^{i\varphi} - \tilde{j}^*_J\,e^{-i\varphi} + J_{\text{кв}}], \tag{7}$$

где

$$\tilde{j}_J = e\sum_{pq\sigma}\{T_{pq}\,[UpUq\,j_{1pq\sigma} + Upvq\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,r^*_{1-p-q-\sigma} +$$

$$+ Upvq\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,r_{1pq\sigma} + vpvq\,j^*_{\perp-p-q-\sigma}]\}, \tag{8}$$

$$J_{\text{кв}} = e\sum_{pq\sigma}\{T_{pq}\,[UpUq\,j_{2pq\sigma} + Upvq\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,r^*_{2-p-q-\sigma} +$$

$$+ Uqvp\,(\mathrm{sign}\,\sigma)\,r_{2pq\sigma} + v_p v_q\,j^*_{2-p-q-\sigma}] - \text{э. с.}\}. \tag{9}$$

Здесь

$$j_{1pq\sigma} = \frac{1}{T}\int_0^T j_{pq\sigma}\,e^{-i\frac{\varphi}{2}}\,dt, \qquad j_{2pq\sigma} = \frac{1}{T}\int_0^T j_{pq\sigma}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}\,dt. \tag{10}$$

Полагая

$$T_{pq}j_{1pq\sigma} = A'_{\perp} + iA''_{\perp}, \qquad T_{pq}\,r^*_{1-p-q-\sigma} = A'_2 + iA''_2,$$

$$T_{pq}r_{1pq\sigma} = A'_3 + iA''_3, \qquad T_{pq}j^*_{1-p-q-\sigma} = A'_4 + iA''_4. \tag{11}$$

$$(\widetilde{j_J} = j_0 e^{i\psi} = A' + iA'', \tag{12}$$

$$A''' = e\sum_{pq\sigma} [U_p U_q A''' + U_p v_q (\operatorname{sign}\sigma) A'{}_2'' + U_q U_p (\operatorname{sign}\sigma) A'{}_3'' + v_p v_q A'{}_4''], \tag{13}$$

для спектральной плотности флуктуаций амплитуды и ширины линии джозефсоновского тока в корреляционном приближении получаем следующие выражения:

$$(\delta j_0^2)_\omega = \frac{(\bar{A}')^2 (\delta A')^2_\omega + \bar{A}' \bar{A}'' [(\delta A' \delta A'')_\omega + (\delta A'' \delta A')_\omega] + (\bar{A}'')^2 (\delta A'')^2_\omega}{(\bar{d}_0)_2},$$

$$(\Delta\omega) = \frac{(\bar{A}')^2 \left(\frac{d}{dt}\delta A'\right)^2_0 + (\bar{A}'')^2 \left(\frac{d}{dt}\delta A''\right)^2_0 - \bar{A}'\bar{A}'' \left[\left(\frac{d}{dt}\delta A'' \frac{d}{dt}\delta A'\right)_\omega + \right.}{(\bar{j}_0)^4} \times$$

$$\times \frac{\left. + \left(\frac{d}{dt}\delta A' \frac{d}{dt}\delta A''\right)_\omega \right]}{(\bar{j}_0)^4}. \tag{14}$$

Для вычисления флуктуаций $2(\delta A')^2_\omega$, $2(\delta A'')^2_\omega$, ... используем систему уравнений для $\delta A_i'$, $\delta A_i''$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Эти уравнения непосредственно следуют из (6). Поступая аналогично тому, как это сделано в [7], запишем уравнения для односторонних спектральных плотностей:

$$\begin{gathered}- i\omega [(\delta A_1')^2]^{(+)}_\omega - \langle(\delta A_1')^2\rangle_{\tau=0} = (E_p - E_q - eV)(\delta A_1'' \delta A_\perp')^{(+)}_\omega - \varepsilon [(\delta A_1')^2]^{(+)}_\omega, \\ - i\omega (\delta A_1'' \delta A_1')^{(+)}_\omega - \langle \delta A_1'' \delta A_1' \rangle_{\tau=0} = (E_p - E_q - eV)[(\delta A_1')^2]^{(+)}_\omega - \varepsilon (\delta A_1'' \delta A_1')^{(+)}_\omega\end{gathered} \tag{15}$$

и аналогично для $[(\delta A_i')^2]^{(+)}_\omega$, $(\delta A_i' \delta A_i'')^{(+)}_\omega$, $(\delta A_i'' \delta A_i')^{(+)}_\omega$, ($i = 2, 3, 4$). Здесь $\langle \delta A_i' \delta A_i' \rangle_{\tau=0}$, $\langle \delta A_i' \delta A_i'' \rangle_{\tau=0}$ и т. д. — значения корреляционных функций при $\tau = 0$. Эти значения вычисляем из перестановочных соотношений для операторов квазичастиц по методике Боголюбова [8].

Решая эти уравнения и используя выражения (14), можно найти выражения для спектральной плотности флуктуаций амплитуды и ширины линии джозефсоновского тока. Выпишем эти выражения для частного случая $T=0$, когда $n_p = m_q = 0$:

$$\begin{gathered}(\delta j_0^2)_\omega = \frac{e^2\varepsilon}{16} \sum_{pq} |T_{pq}|^2 \left(1 - \frac{\zeta_p \zeta_q}{E_p E_q}\right) \left[\frac{1}{(E_p + E_q + eV - \omega)^2 + \varepsilon^2} + \right. \\ \frac{1}{(E_p + E_q + eV + \omega)^2 + \varepsilon^2} + \frac{1}{(E_d + E_q - eV - \omega)^2 + \varepsilon^2} + \\ \left. + \frac{1}{(E_p + E_q - eV + \omega)^2 + \varepsilon^2}\right],\end{gathered} \tag{16}$$

$$\Delta\omega = \varepsilon \frac{\langle \delta j_0^2 \rangle}{\bar{j}_0^2} = \varepsilon \frac{e^2}{8\bar{j}_0^2} \sum_{pq} |T_{pq}|^2 \left(1 - \frac{\zeta_p \zeta_q}{E_p E_q}\right). \tag{17}$$

Здесь $\dfrac{\langle \delta j_0^2 \rangle}{\bar{j}_0^2} = \dfrac{e^2}{8\bar{j}_0^2} \sum_{pq} |T_{pq}|^2 \left(1 - \dfrac{\zeta_p \zeta_q}{E_p E_q}\right)$ — относительная дисперсия флуктуаций амплитуды, не зависящая от величины ε.

Произведем приближенные оценки для относительной дисперсии, учитывая, что при суммировании в симметричных пределах член

$$\sum_{pq} | T_{pq} |^2 \frac{\zeta_p \zeta_q}{E_p E_q} = 0.$$

Приближенно можно положить $\sum_{pq} | T_{pq} |^2 \approx \frac{\mu^2}{\Delta^2} | T_{pq} |_F^2$, $j_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta}{eR}$, где $| T_{pq} |_F^2$— значение $| T_{pq} |^2$ на поверхности Ферми. Используя формулу (2.44) из [4], получаем при $R \approx 1$ *ом*

$$\frac{\langle \delta j_0^2 \rangle}{\overline{j_0^2}} \approx 10^{-12}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. ЖЭТФ, **53**, 2159, 1967.
2. Stephen M. T. Phys. Rev., **182**, 531, 1969.
3. Dahm A. T., Denenstein A. et. al. Phys. Rev. Lett., **22**, 1416, 1968.
4. Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., 1970.
5. Свидзинский А. В., Слюсарев В. А. ЖЭТФ, **51**, 177, 1966.
6. Климонтович Ю. Л. «Успехи физических наук», **101**, 577, 1970.
7. Климонтович Ю. Л., Ковалев А. С., Ланда П. С. «Успехи физических наук», **106**, 279, 1972.
8. Боголюбов Н. Н. Избранные труды, т. 2. Киев, 1970.

Поступила в редакцию
7.6 1972 г.

Кафедра
общей физики для мехмата

УДК 53—83

Д. В. ГАЛЬЦОВ, В. А. ЛОСЕВ, А. А. СОКОЛОВ

ЭФФЕКТЫ КОГЕРЕНТНОСТИ В СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Синхротронное излучение релятивистской заряженной частицы, движущейся по окружности, в настоящее время детально изучено [1]. Изучение ансамбля сфазированных частиц может существенно отличаться от излучения отдельной частицы вследствие эффектов когерентности. В настоящей заметке рассматривается излучение N-частиц, равномерно распределенных по окружности, причем предполагается, что их взаимное расположение не меняется в течение всего времени движения.

Как показано в работе [2], в выражении для интенсивности излучения в этом случае появляется следующий фактор:

$$S_N^{(\nu)} = N (-1)^\nu \frac{\sin \pi\nu}{\operatorname{tg} \frac{\pi\nu}{N}}, \tag{1}$$

где ν — номер гармоники.

Наличие этого дополнительного фактора приводит к тому, что излучение гармоник, не кратных полному числу частиц, оказывается запрещенным, в то время как излучение кратных гармоник усиливается пропорционально квадрату числа частиц. Таким образом, полная интенсивность излучения может быть записана в виде

$$W = N^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} W(N\nu), \tag{2}$$

где $W(\nu)$ — интенсивность излучения гармоники ν одной частицей: