

УДК 621.8.0343

В. П. ВОРОНИН

ДЕЙСТВИЕ СТАТИЧЕСКОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Содержится решение задачи о взаимодействии поверхностной волны в жидкости с постоянным вертикальным электрическим полем методом малого параметра.

При теоретическом рассмотрении работы разрядных ламп с жидким катодом Я. И. Френкель показал [1], что электрическое поле взаимодействует с постоянно существующими из-за тепловых флуктуаций поверхностными волнами, изменяя скорость их распространения. В сравнительно недавней работе Мелчера [2] было исследовано поведение жидкости в тангенциальном переменном электрическом поле, которое вызывает увеличение скорости поверхностных волн. В настоящей работе методом, развитым Мелчером, решается задача о взаимодействии постоянного вертикально направленного электрического поля с волнами на поверхности проводящих и диэлектрических жидкостей, а также описывается эксперимент по измерению скорости распространения волн в этих условиях.

Рассматриваются двумерные поверхностные волны, распространяющиеся в направлении x (рис. 1) по границе раздела двух жидкостей, совпадающей в состоянии покоя с плоскостью $y=0$. Постоянное электрическое поле создается в конденсаторе, пластины которого параллельны поверхности раздела. В дальнейшем величины, относящиеся к полупространствам $y < 0$ и $y > 0$, отмечаются индексами 1 и 2 соответственно. Взаимодействие электрического поля с диэлектрической жидкостью происходит благодаря возникновению пондеромоторных сил [3], плотность которых равна

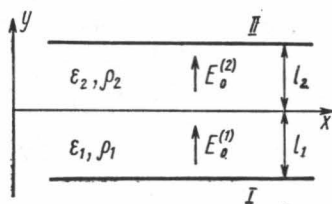


Рис. 1. Распространение двумерных поверхностных волн по границе раздела двух жидкостей

$$\vec{f}_{эл} = \rho_{эл} \vec{E} - \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \text{grad } \epsilon, \quad (1)$$

где \vec{E} — напряженность поля, $\rho_{\text{эл}}$ — плотность свободного заряда, ϵ — диэлектрическая проницаемость. Очевидно, что, как и сила поверхностного натяжения, эти силы действуют непосредственно на поверхность раздела однородных жидкостей и равны нулю вне этой поверхности.

Движение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{f} \quad (2)$$

и уравнением непрерывности

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad (3)$$

где \vec{v} — скорость, p — давление, \vec{f} — плотность внешних сил; плотность объемных внешних сил $\vec{f} = -\vec{j}\rho g$.

Квазистатическое электрическое поле в объеме жидкости подчиняется уравнениям:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (4)$$

$$\text{div } \epsilon \vec{E} = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим условия для электрических и механических величин, входящих в уравнения (2)–(5), выполняющиеся на возмущенной поверхности раздела жидкостей, описываемой уравнением

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0, \quad (6)$$

где $\eta(x, t)$ — вертикальное смещение из плоскости равновесия $y=0$.

Требование непрерывности границы раздела жидкостей выражается равенством нормальных компонентов скорости с обеих ее сторон:

$$n_x v_x^{(1)} + n_y v_y^{(1)} = n_x v_x^{(2)} + n_y v_y^{(2)} \quad \text{при } y = \eta, \quad (7)$$

где v_x, v_y, n_x, n_y — проекции скорости и единичного вектора нормали к поверхности

$$\vec{n} = \left(\vec{j} - i \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (8)$$

на соответствующие индексам направления. Из уравнения (2), выражая плотность поверхностных сил через дивергенцию эквивалентного тензора натяжения

$$T_{ik} = T_{ik}^M + T_{ik}^{\text{эл}} \quad (9)$$

(T_{ik}^M — тензор капиллярного натяжения, $T_{ik}^{\text{эл}}$ — тензор Максвелла [3]), получаем следующее граничное условие в компонентах:

$$n_x p^{(1)} - n_x T_{xx}^{(1)} - n_y T_{xy}^{(1)} = n_x p^{(2)} - n_x T_{xx}^{(2)} - n_y T_{xy}^{(2)}, \quad \text{при } y = \eta, \quad (10)$$

$$n_y p^{(1)} - n_y T_{yy}^{(1)} - n_x T_{yx}^{(1)} = n_y p^{(2)} - n_y T_{yy}^{(2)} - n_x T_{yx}^{(2)} \quad \text{при } y = \eta. \quad (11)$$

Из (4) запишем условие равенства тангенциальных компонентов электрического поля у границы раздела двух диэлектриков:

$$n_x E_y^{(1)} - n_y E_x^{(1)} = n_x E_y^{(2)} - n_y E_x^{(2)} \quad \text{при } y = \eta. \quad (12)$$

На жестких проводящих электродах, параллельных плоскости $y=0$, получаем условия для нормальных к ним составляющих компонентов скорости

$$v_y^{(1)} = 0 \quad \text{при } y = -l_1, \quad (13)$$

$$v_y^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = l_2 \quad (14)$$

и тангенциальных компонентов электрического поля

$$E_x^{(1)} = 0 \quad \text{при } y = -l_1, \quad (15)$$

$$E_x^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = l_2. \quad (16)$$

Для нахождения решения уравнений (2)—(5) с граничными условиями (7) и (10)—(16) воспользуемся хорошо известным методом малого параметра (см., например, [2]), позволяющим линеаризировать уравнения движения. Представим искомые решения в виде ряда по степеням параметра $\theta \sim a/\lambda$, предполагаемого малым с тем, чтобы с достаточной точностью можно было удовлетвориться двумя первыми членами разложения:

$$\eta = \theta^0 \eta' + \theta^1 \eta'' + \theta^2 \dots \quad (17)$$

и так далее для остальных переменных. Если подставим эти решения в уравнения движения (2)—(5) и потребуем независимого выполнения уравнений для любой степени θ , то получим систему уравнений для каждого приближения. Решения уравнений нулевого приближения

$$\begin{aligned} \eta' &= 0, & \vec{v}' &= 0, \\ p' &= p_0 - \rho g y, & \vec{E}' &= jE_0, \end{aligned} \quad (18)$$

подставленные в систему уравнений первого приближения, дают линейные уравнения для p'' , \vec{v}'' , \vec{E}'' . Предположим, что решения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} p'' &= \text{Re } \widehat{p}(y) e^{j(\omega t - kx)}, \\ \vec{v}'' &= \text{Re } [i\widehat{v}_x(y) + j\widehat{v}_y(y)] e^{j(\omega t - kx)}, \\ \vec{E}'' &= \text{Re } [i\widehat{E}_x(y) + j\widehat{E}_y(y)] e^{j(\omega t - kx)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из уравнений первого приближения для электрического поля получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для \widehat{E}_x :

$$\frac{d^2 \widehat{E}_x}{dy^2} - k^2 \widehat{E}_x = 0. \quad (20)$$

Аналогично из линеаризованных уравнений (2) и (3) получаем для \widehat{p} :

$$\frac{d^2 \widehat{p}}{dy^2} - k^2 \widehat{p} = 0. \quad (21)$$

Эти уравнения имеют решения:

$$\widehat{E}_x = Ae^{ky} + Be^{-ky}, \quad (22)$$

$$\widehat{p} = C_e^{ky} + De^{-ky}, \quad (23)$$

где A, B, C, D — постоянные. Из уравнений (2)–(5), пользуясь полученными решениями для \hat{E}_x и \hat{p} , можно выразить остальные неизвестные компоненты скорости и электрического поля $\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{E}_y$.

Для согласованности решения необходимо, чтобы граничные условия (7), (10)–(16) удовлетворялись независимо до того же порядка разложения по θ , что и объемные уравнения. При записи системы граничных условий для решений уравнений первого приближения учитываем, что с точностью до величин второго порядка малости из уравнений (6) и (8) следует

$$\frac{\partial \eta''}{\partial t} = v_y''$$

или

$$\hat{\eta} = \left(\frac{\hat{v}_y^{(1)}}{j\omega} \right)_{y=0} = \frac{k^2}{\omega^2 \rho_1} (A^{(1)} - B^{(1)}) \quad (24)$$

и

$$\vec{n} = \vec{j} - \theta^1 \left(\vec{i} \frac{\partial \eta''}{\partial x} \right) + \theta^2 \dots$$

или

$$\hat{n} = \vec{i} \frac{jk^2}{\omega^2 \rho_1} (A^{(1)} - B^{(1)}). \quad (25)$$

Разложение в ряд по степеням θ тензоров натяжения (9) имеет вид

$$T_{xy}^M = T_{yx}^M = 0,$$

$$T_{xx}^M = T_{yy}^M = \sigma \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \approx \theta^1 \left(\sigma \frac{\partial^2 \eta''}{\partial x^2} \right) + \theta^2 \dots \quad (26)$$

и

$$T_{xy}^{\text{эл}} = T_{yx}^{\text{эл}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_x E_y \approx \theta^1 \left(\frac{\varepsilon}{4\pi} E_0 E_x'' \right) + \theta^2 \dots,$$

$$T_{xx}^{\text{эл}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2) \approx \theta^0 \left(-\frac{\varepsilon}{8\pi} E_0^2 \right) + \theta^1 \left(-\frac{\varepsilon}{4\pi} E_0 E_y'' \right) + \theta^2 \dots,$$

$$T_{yy}^{\text{эл}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (E_y^2 - E_x^2) \approx \theta^0 \left(\frac{\varepsilon}{8\pi} E_0^2 \right) + \theta^1 \left(\frac{\varepsilon}{4\pi} E_0 E_y'' \right) + \theta^2 \dots \quad (27)$$

Подставляя в граничные условия решения для $\hat{p}, \hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{E}_x, \hat{E}_y$, разложения (24)–(27) и группируя члены по степеням θ , получаем восемь алгебраических уравнений, из которых можно определить постоянные $A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}, A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}$, входящие в решение уравнений первого приближения. Условием совместности этих уравнений является равенство детерминанта, составленного из коэффициентов при этих константах, нулю. Очевидно, что это равенство представляет связь частоты ω с волновым числом для гармонического возмущения, распространяющегося по границе раздела двух жидкостей, помещенных в постоянное вертикальное электрическое поле. Разлагая детерминант восьмого порядка по минорам и производя довольно трудоемкие преобразования, получаем выражение для фазовой скорости волны:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \operatorname{cth} kl_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kl_2} \right) + \frac{\sigma k}{\rho_1 \operatorname{cth} kl_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kl_2} -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 (E_0^{(1)})^2 \operatorname{cth} kl_1 + \varepsilon_2 (E_0^{(2)})^2 \operatorname{cth} kl_2}{\rho_1 \operatorname{cth} kl_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kl_2}. \quad (28)$$

Первые два члена в этом выражении соответствуют известному случаю [4] распространения волны по поверхности раздела двух слоев жидкости. В случае, если толщина слоев обеих жидкостей велика по сравнению с длиной волны ($kl \rightarrow \infty$), выражение (28) приобретает вид

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\sigma k}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 (E_0^{(1)})^2 + \varepsilon_2 (E_0^{(2)})^2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (29)$$

Если нижняя жидкость являющаяся проводящей, граничит сверху с легкой жидкостью (т. е. $E_0^{(1)} = 0$, $\rho_1 \gg \rho_2$), то в коротковолновом приближении ($kl \rightarrow \infty$)

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho_1} - \frac{\varepsilon_2}{4\pi\rho_1} (E_0^{(2)})^2, \quad (30)$$

что полностью совпадает с аналогичным выражением, полученным для проводящей жидкости в работе [1]. Последний член в выражениях (29) и (30), учитывающий влияние электрического поля, не зависит от k , и, следовательно, его вклад в фазовую скорость не может быть объяснен появлением дополнительного поверхностного натяжения.

Как видно из (30), при увеличении напряженности поля скорость распространения поверхностных волн уменьшается и при

$$E_{\text{кр}}^2 = 4\pi \left(\frac{\rho_1 g}{k} + \sigma k \right) \quad (31)$$

(для случая проводящей жидкости) обращается в ноль. Дальнейшее увеличение поля приводит к росту амплитуды волны со временем, т. е. поверхность становится неустойчивой. Из (29) и (30) следует также, что при изменении электрического поля не происходит смещения по частоте минимума фазовой скорости. Минимальное значение напряженности электрического поля, при котором поверхность становится неустойчивой, получается из (30) при волновом числе $k_m = (\rho g / \sigma)^{1/2}$, соответствующем минимальному значению фазовой скорости в отсутствие электрического поля.

Для проверки теории были произведены непосредственные измерения скорости поверхностной волны в электрическом поле. Насколько нам известно, подобный эксперимент до сих пор не проводился. Использовалась известная методика определения изменения фазовой скорости волны по измеряемому изменению разности фаз сигналов $\Delta\varphi$, поступающих от двух приемников, расположенных на фиксированном расстоянии L друг от друга. Относительное изменение начальной скорости волны частоты f в этом случае дается выражением

$$\frac{\Delta c}{c_0} = - \frac{c_0}{2\pi L f^2} \cdot \Delta\varphi. \quad (32)$$

Вертикальное электрическое поле создавалось при помощи плоского конденсатора, наполовину заполняемого исследуемой жидкостью, размеры которого ($15 \times 15 \times 2$ см) были достаточны для получения в нем однородного поля. Общая конструкция экспериментальной установки и принцип действия использованных фотоэлектрических приемников волны описаны в работах [5, 6]. Чувствительность приемных трактов была достаточна для работы с волнами малой амплитуды ($a/\lambda < 10^{-4}$), что позволяло избавиться от ошибок при измерениях, связанных с ин-

тенсивной генерацией гармоник при распространении капиллярных волн конечной амплитуды. Входящая в выражение (32) величина неизменной скорости c_0 определялась по вращению фигуры Лиссажу на экране осциллографа при изменении расстояния между излучателем волны и одним из приемников. На рис. 2 приведены экспериментальные и теоретические зависимости относительного изменения фазовой скорости

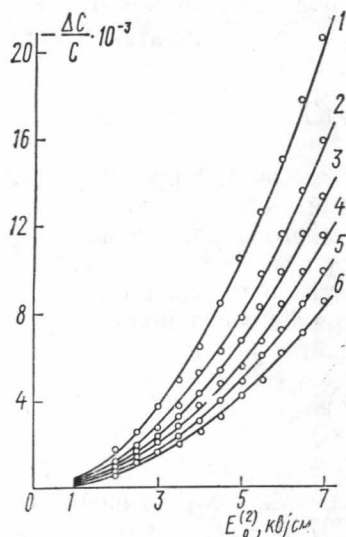


Рис. 2. Экспериментальные и теоретические зависимости относительного изменения скорости капиллярных волн на поверхности технической воды ($\sigma=73$ дн/см, $\rho=1$ г/см³) от напряженности постоянного вертикального электрического поля на разных частотах. Нумерация кривых соответствует табл. 1

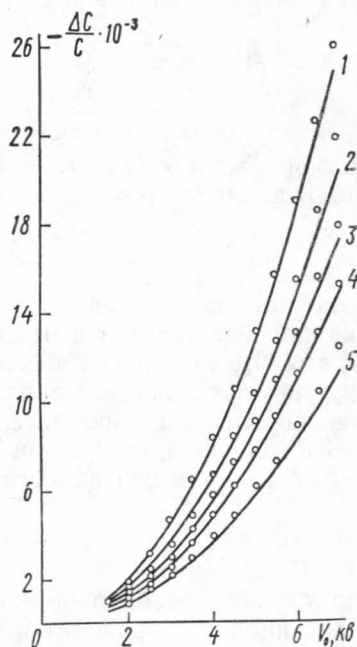


Рис. 3. Экспериментальные и теоретические зависимости относительного изменения скорости капиллярных волн на поверхности о-ксилола ($\sigma=30,1$ дн/см, $\rho=0,88$ г/см³) от напряжения, приложенного к пластинам конденсатора на разных частотах. Нумерация кривых соответствует табл. 2

сти волн разных частот, распространяющихся по поверхности технической воды, от напряженности поля в зазоре конденсатора. Проводимость технической воды ($\kappa \sim 10^{-2}$ ом⁻¹ см⁻¹) позволяла считать ее проводящей жидкостью, поэтому теоретические кривые на рис. 2 были вычислены из приближенного выражения

$$\frac{\Delta c}{c_0} \approx \frac{(E_0^{(2)})^2}{12\pi\rho_1 c_0}, \quad (33)$$

полученного с точностью до членов, пропорциональных $(\Delta c)^2$ из (30).

При построении экспериментальных кривых была учтена поправка на изменение напряженности поля при увеличении напряжения за счет поднятия постоянного уровня жидкости в конденсаторе. Как видно из показанных на рис. 2 зависимостей и табл. 1, где приведены значения коэффициента $a = (\Delta c/c_0)/(E_0^{(2)})^2$, полученные экспериментально и

вычисленные из выражения (37), данные хорошо согласуются. Влияние поля на уменьшение скорости волны увеличивается по мере приближения к частоте, соответствующей минимальному значению фазовой скорости.

Таблица 1

№	$f, \text{гц}$	$c_{\text{эксп}}^{\circ}$ см/сек	$a_{\text{теор}} \cdot 10^9$, см ² /с ²	$a_{\text{эксп}} \cdot 10^9$, см ² /с ²
1	40	23,4	0,42	0,43
2	60	30,2	0,32	0,33
3	80	33,2	0,27	0,27
4	100	35,5	0,23	0,24
5	125	38,5	0,20	0,20
6	160	42,0	0,17	0,17

Таблица 2

№	$f, \text{гц}$	$c_{\text{эксп}}^{\circ}$ см/сек	$a_{\text{теор}} \cdot 10^9$, см ² /с ²	$a_{\text{эксп}} \cdot 10^9$, см ² /с ²
1	40	21,7	0,51	0,55
2	60	23,8	0,42	0,44
3	80	26,1	0,35	0,37
4	100	28,0	0,31	0,31
5	160	32,0	0,23	0,25

Как видно из выражения (29), в случае распространения волны по поверхности раздела диэлектрических жидкостей изменение ее фазовой скорости определяется значениями напряженности поля по обе стороны границы раздела. Считая обе среды (воздух — жидкость) идеальными диэлектриками, можно выразить значения напряженностей поля в них через величину напряжения V_0 приложенного к пластинам конденсатора

$$E_0^{(1)} = \frac{V_0}{\left(l_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} l_2\right)}, \quad E_0^{(2)} = \frac{V_0}{\left(l_2 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} l_1\right)}, \quad (34)$$

где l_2 и l_1 — расстояния от границы раздела до верхней и нижней пластин конденсатора.

Зависимости $\Delta c/c_0 = f(V_0)$ и значения коэффициента $a = (\Delta c/c_0)/(V_0)^2$ для о-ксилола ($\chi \sim 10^{-15} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) приведены на рис. 3 и табл. 2. Здесь также наблюдается удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических, вычисленных из выражения (29), результатов.

Несколько большее, чем в предыдущем случае, расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей объясняется, вероятно, конечным временем релаксации свободного заряда на поверхности слабопроводящей жидкости. Возникающие при этом на поверхности сдвиговые напряжения, которые могут изменить характер дисперсии ([2]), не учитывались в проведенном выше анализе.

Полученные результаты подтверждают предложенный Я. Френкелем механизм возникновения неустойчивости поверхности в электрическом поле и позволяют с помощью предложенной методики с большой точностью предсказывать условия ее установления по начальным участкам экспериментальных зависимостей скорости распространения поверхностной волны от напряженности электрического поля.

В заключение выражаю глубокую признательность В. А. Красильникову и Л. К. Зарембо за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. ЖЭТФ, 6, 347, 1936.
2. Melcher J. R., Schwarz W. J. Phys. of Fluids, 11, 2604, 1968.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., 1957.
4. Лэмб Г. Гидродинамика. М.—Л., 1947.
5. Воронин В. П., Зарембо Л. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 1970.
6. Воронин В. П., Зарембо Л. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 1970.

Поступила в редакцию
17.2.1972 г.

Кафедра
акустики