

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1973

УДК 621.373.072.9

А. Х. Ш. БУХАРИ, И. И. МИНАКОВА

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА АВТОГЕНЕРАТОР С НЕЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ

Рассмотрено поведение в стационарном режиме автогенератора с нелинейным контуром при параметрическом и автопараметрическом воздействии с двойной частотой автоколебаний. Исследованы особенности поведения при жестком режиме генерации, показаны возможности расширения полосы синхронизации при определенном законе изменения расстройки. Теоретически полученные закономерности проверены экспериментально.

При модуляции активных или реактивных параметров различных типов автоколебательных систем может возникнуть явление параметрической синхронизации при близких к кратным соотношениях частоты автоколебаний и частоты модуляции параметра. Условия возникновения параметрической синхронизации, закономерности установления синхронного режима, ширина полосы синхронизации существенно зависят как от свойств автоколебательной системы, так и от типа параметрического воздействия.

Явления параметрической синхронизации в одночастотном режиме работы автогенераторов изучаются достаточно давно, однако воздействия на кратных частотах, особенно для систем, имеющих два типа нелинейных элементов — нелинейный активный и нелинейный реактивный, изучены совершенно недостаточно. Это относится в первую очередь к параметрическим воздействиям на сложные автоколебательные системы.

В работе [1] рассматривался вопрос об особенностях явления параметрической синхронизации на кратных частотах при наличии нелинейного контура и запаздывания в обратной связи, при мягкой симметричной характеристике нелинейного активного элемента. Однако ряд современных приборов (туннельные, лавино-пролетные диоды и т. д.) имеют более сложные характеристики, аппроксимируемые полиномами пятой степени и выше. Поэтому представляет интерес рассмотреть в таких сложных автоколебательных системах явления возникновения параметрической синхронизации и закономерности установления синхронного режима.

В настоящей работе исследуется параметрическая синхронизация автогенератора с нелинейным контуром и жесткой характеристикой нелинейного активного элемента при воздействии на частотах, кратных

частоте автоколебаний. При этом под воздействием понималось как параметрическое воздействие — изменение одного из реактивных параметров колебательной системы, — так и автопараметрическое воздействие внешней э.д.с., включенной в нелинейный контур автогенератора. Кроме того, потребовалось исследование поведения автогенератора с линейным контуром, работающего в жестком режиме генерации, как в синхронном, так и в асинхронном.

Уравнение, описывающее движение в автогенераторе с нелинейным контуром и жесткой симметричной характеристикой нелинейного активного элемента, может быть записано при параметрическом изменении одного из реактивных параметров, в виде

$$\ddot{x} + 2(\delta_0 - \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4) \dot{x} + \omega_0^2(1 + m \cos npt) x + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0. \quad (1)$$

К уравнению такого типа могут быть сведены задачи о параметрической синхронизации генераторов с туннельными, лавино-пролетными диодами, генераторов СВЧ с запаздыванием в нелинейном активном элементе (при учете зависимости величин δ от времени запаздывания) и т. д. Полагая, что система квазиконсервативна, все нелинейности малы, в гармоническом приближении при $n=2$ движение в системе при синхронизации можно записать в виде $x = A \sin(pt - \varphi)$, а укороченные уравнения запишутся следующим образом:

$$\frac{dA}{dt} = -A \left(\delta_0 - \frac{1}{4} \delta_2 A^2 + \frac{1}{8} \delta_4 A^4 \right) + \frac{1}{4p} \omega_0^2 mA \sin 2\varphi, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p} - \frac{3}{8p} \gamma A^2 + \frac{1}{4p} \omega_0^2 m \cos 2\varphi. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) можно получить выражение для амплитудной кривой в стационарном синхронном режиме

$$\Delta_{1,2} = \frac{3}{8p} \gamma A^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4p} \omega_0^2 m \right)^2 - \frac{1}{64} \delta_4^2 \left[(A^4 - A_0^4) - \frac{2\delta_2}{\delta_4} (A^2 - A_0^2) \right]^2}, \quad (4)$$

где A_0 — амплитуды автономных автоколебаний и $\Delta = \frac{p^2 - \omega_0^2}{2p}$.

Полученные выражения (2), (3) и (4) дают возможность рассмотреть поведение автогенератора в области параметрической синхронизации и вблизи нее при различных параметрах автогенератора. Как видно, наличие нелинейного реактивного элемента в контуре сказывается на поведении системы только постольку, поскольку появляется зависимость резонансной частоты контура от амплитуды колебаний в нем (3). При этом амплитудная кривая, симметричная при $\gamma=0$ относительно оси $\Delta=0$, становится симметричной относительно скелетной линии

$$\Delta_{\text{ск}} - \frac{3}{8p} \gamma A^2 = 0. \quad (5)$$

Устойчивыми будут только те решения системы (2) и (3), для которых справедливы условия при $\delta_0 \geq 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_4 > 0$.

1. Амплитудные условия:

$$A_1^2 > \frac{2}{3} \frac{\delta_2}{\delta_4} + \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{\delta_2}{\delta_4} \right)^2 - \frac{8}{3} \frac{\delta_0}{\delta_4}},$$

$$A_2^2 < \frac{2}{3} \frac{\delta_2}{\delta_4} - \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{\delta_2}{\delta_4}\right)^2 - \frac{8}{3} \frac{\delta_0}{\delta_4}}. \quad (6)$$

2. Фазовое условие (условие вертикальных касательных):

$$\left[(A^6 - A_{01,2}^6) - 3 \frac{\delta_2}{\delta_4} (A^4 - A_{01,2}^4) + \left(2 \frac{\delta_2^2}{\delta_4^2} + 8 \frac{\delta_0}{\delta_4} \right) (A^2 - A_{01,2}^2) \right] + \frac{3}{2\rho} \gamma \Delta_{\Gamma} > 0, \quad (7)$$

где $A_{01,2}^2$ — квадраты амплитуд автономного режима, и Δ_{Γ} — расстройка относительно частот автоколебаний, равная для случая параметрического воздействия

$$\Delta_{\Gamma} = \Delta + \frac{3}{8} \gamma A^2.$$

Из (6) видно, что амплитудные условия устойчивости не зависят от реактивной нелинейности и от расстройки и совпадают с условиями устойчивости для случая синхронизации автогенератора с линейным контуром. Фазовое условие устойчивости является функцией реактивной нелинейности γ и расстройки.

Представляет интерес сравнение стационарных синхронных режимов при параметрическом и автопараметрическом воздействии. При воздействии с двойной частотой, при включении внешней э.д.с. в контур автогенератора уравнение системы принимает вид

$$\ddot{x} + 2(\delta_0 - \delta_2 x^2 + \delta_4 x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^2 + \gamma x^3 = P \cos 2pt. \quad (8)$$

Тогда движение системы в полосе синхронизации можно записать как

$$x = A \sin(pt - \varphi) + \lambda \cos 2pt, \quad (9)$$

где $\lambda = \frac{P}{\omega_0^2 - 4\rho^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний. Укороченные уравнения системы:

$$\frac{dA}{dt} = -A \left(\underbrace{\delta_0 - \frac{1}{2} \delta_2 \lambda^2 + \frac{3}{8} \delta_4 \lambda^4}_{\delta_0^*} \right) + \frac{1}{4} A^3 \left(\underbrace{\delta_2 - \frac{3}{4} \delta_4 \lambda^2}_{\delta_2^*} \right) - \frac{1}{8} \delta_4 A^5 + \frac{\beta' \lambda}{2\rho} A \sin 2\varphi, \quad (10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta - \frac{3}{8} \gamma' (A^2 + 2\lambda^2) + \frac{\beta' \lambda}{2\rho} \cos 2\varphi, \quad (11)$$

где $\gamma' = \omega_0^2 \gamma$ и $\beta' = \omega_0^2 \beta$.

Как видно из (8), характеристика нелинейного активного элемента симметрична и при действии внешней э.д.с. с частотой 2ρ резонансных комбинационных частот за счет этой нелинейности не возникает. Из уравнения (11) следует, что есть асинхронное воздействие на частоту автоколебаний, определяемое членом $-\frac{3}{4\rho} \omega_0^2 \gamma \lambda^2$. Как следует из (10), внешняя сила оказывает асинхронное воздействие на эквивалентные параметры нелинейной характеристики активного элемента. Можно

ввести эти эквивалентные параметры и получить выражение для амплитудной кривой из (10) и (11) в области автопараметрической синхронизации в стационарном режиме:

$$\Delta = \frac{3}{8\rho} \gamma' (A^2 + 2\lambda^2) \pm \sqrt{\left(\frac{\beta'\lambda}{2\rho}\right)^2 - \frac{1}{64} \delta_4^2 \left[(A^2 - A_{0*}^2) - \frac{2\delta_2^*}{\delta_4} (A^2 - A_{0*}^2) \right]^2}, \quad (12)$$

где $A_{0*}^2 = \frac{\delta_2^*}{\delta_4} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_2^*}{\delta_4}\right)^2 - \frac{8\delta_0^*}{\delta_4}}$ — амплитуда автоколебаний при наличии асинхронного воздействия вынужденных колебаний с амплитудой λ [2].

Нелинейность реактивного элемента контура проявляется двояко: наличие несимметричного члена $\approx \beta$ определяет возникновение автопараметрического воздействия, а наличие кубического члена $\approx \gamma$ вызывает сдвиг резонансной частоты контура.

Из сравнения выражений (2), (3) и (10) видим полную аналогию всех закономерностей поведения системы внутри полос автопараметрической и параметрической синхронизации, учитывая, что при автопараметрическом воздействии система квазиконсервативна при амплитуде, соответствующей режиму асинхронного воздействия. Положив формально $m = \beta\lambda$ и $\delta_0 = \delta_0^*$, $\delta_2 = \delta_2^*$ и заменив A_0^2 на амплитуду при наличии асинхронного воздействия A_{0*}^2 , из (10) и (11) можно получить выражения, соответствующие (6), (7) для жесткого режима и аналогично для мягкого режима. При жестком режиме при автопараметрическом воздействии амплитудные условия устойчивости можно записать в виде (6) при замене значений δ и A_0 на δ^* и A_0^* и фазовое условие устойчивости в виде (7). Отличие от (7) состоит в том, что Δ_r зависит не только от A^2 , но и от λ^2 и определяется так:

$$\Delta_r = \Delta + \frac{3}{8} \gamma (A^2 + 2\lambda^2). \quad (12a)$$

Максимальное и минимальное значения стационарной амплитуды в области параметрической синхронизации при резонансной частоте нелинейного контура $\omega_{рез}^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{8} \gamma A^2$ могут быть определены из уравнения (4):

$$(A^4 - A_{01,2}^4) - 2 \frac{\delta_2}{\delta_4} (A^2 - A_{01,2}^2) = \pm \frac{2\omega_0 m}{\delta_4}. \quad (13)$$

Соответственно для автопараметрического воздействия в области синхронизации аналогично можно получить максимальное и минимальное значения амплитуды при замене $A_{01,2}^2$ на $A_{0*1,2}^2$, δ_2 на δ_2^* и δ_0 на δ_0^* .

Как видно из (13), максимальное приращение амплитуды в полосе синхронизации, как и при мягком режиме [1], определяется только глубиной модуляции параметра m и нелинейными коэффициентами затухания δ_2 и δ_4 -системы. Оно не зависит от коэффициента нелинейности γ реактивного элемента. Относительно уровня амплитуды асинхронного режима A_{0*}^2 характер зависимости максимального приращения амплитуды при автопараметрической синхронизации от амплитуды внешнего воздействия такой же, как и при параметрической от глубины модуляции параметра относительно уровня A_0^2 .

На рис. 1 представлена зависимость (13) A_{\max}^2 от m для случаев мягкого и жесткого режимов. При жестком режиме $\delta_0 > 0$ и соотношении параметров характеристики такое, при котором в автономном режиме возможны две стационарные амплитуды A_{01}^2 — устойчивая и A_{02}^2 — неустойчивая. В этом случае до определенной глубины мо-

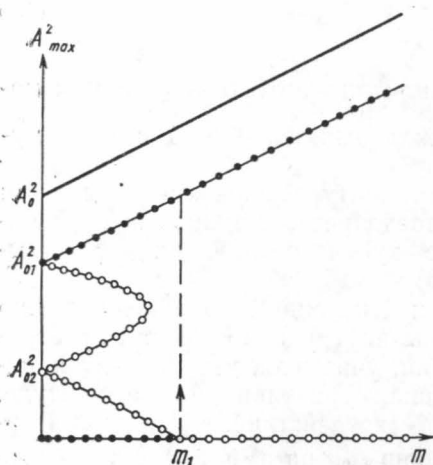


Рис. 1. Зависимость A_{\max}^2 от m для случаев мягкого и жесткого режимов

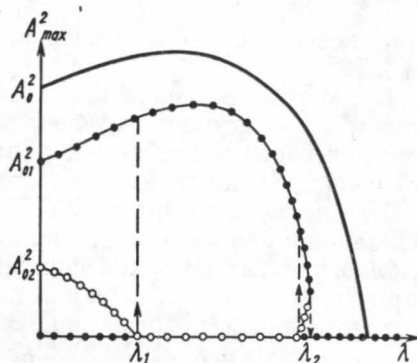


Рис. 2. Зависимость максимальной амплитуды колебаний A_{\max}^2

дуляции параметра m_1 состояние $A^2=0$ также является устойчивым. При $m_1 \geq \frac{\delta_2 A_{02}^2}{\omega_0}$ возникают синхронизованные колебания сразу с конечной амплитудой.

На рис. 2 представлена зависимость максимальной амплитуды колебаний A_{\max}^2 , полученной в стационарном режиме из (10) и (11) от амплитуды вынужденных колебаний λ . Сравнение графиков (рис. 2 и 3) как для мягкого, так и для жесткого режимов показывает, что при параметрическом и автопараметрическом воздействиях на двойной частоте при малых λ существует аналогичный механизм подкачки энергии в системе. Однако при автопараметрическом воздействии существует еще и нелинейный механизм асинхронного гашения, определяющий ряд особенностей поведения системы. Так, за счет асинхронного механизма значение A_{\max}^2 в полосе синхронизации начинает уменьшаться при определенном значении λ . По мере увеличения λ асинхронное воздействие начинает преобладать и автоколебания при $\lambda = \lambda_2$ срываются.

Из выражений (2)—(4) и (10)—(12) можно сделать заключения о режимах параметрической и автопараметрической синхронизаций в некоторых частных случаях. Амплитудная кривая для автогенератора с линейным контуром при жесткой характеристике нелинейного активного элемента может быть определена из (4) и (12), при условии $\gamma=0$.

На рис. 3 изображены амплитудные кривые в области параметрической синхронизации с учетом (6) и (7) и при $\gamma=0$. Они симметричны относительно оси $\Delta=0$. Как видно из рис. 3, при увеличении глубины

модуляции параметра m полоса синхронизации расширяется, и в полосе синхронизации амплитуда автоколебаний A^2 всегда превышает амплитуду автономного режима $A_{0,12}^2$. При любой характеристике нелинейного активного элемента как при мягкой [3], так и при жесткой, в силу квазиконсервативности автоколебательной системы в автономном режиме, ширина полосы параметрической синхронизации зависит только от параметрической подкачки энергии и не зависит от амплитуды автономных колебаний и параметров автоколебательной системы (при неизменной величине δ_2). При заданном коэффициенте модуляции параметра ширина полосы неизменна, до тех пор пока в автономном режиме система автоколебательна. Полоса синхронизации равна полосе параметрического возбуждения консервативной системы. Однако, как следует из (4) при $\gamma=0$, форма амплитудной кривой существенно зависит от нелинейности характеристики активного элемента. Зависимость от нелинейных коэффициентов затухания δ_2 и δ_4 приводит к тому, что при жестком режиме при той же ширине полосы, что и при мягком, амплитудные кривые более плоские.

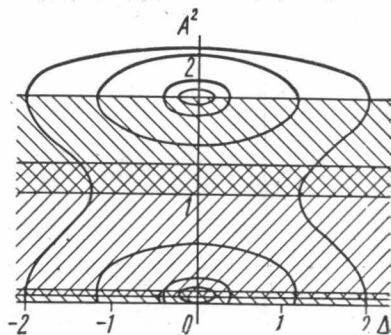


Рис. 3. Амплитудные кривые в области параметрической синхронизации

При автопараметрическом воздействии при $\gamma=0$, в отличие от случая параметрического воздействия, амплитудой квазиконсервативного режима является не амплитуда автономного режима A_0^2 , а амплитуда асинхронного режима, т. е. при мягком режиме $A_{ac}^2 = A_0^2 - 2\lambda^2$ и при жестком — $A_{ac}^2 = A_{0ж}^2$. При постоянном λ и изменении A_0^2 ширина полосы синхронизации неизменна, до тех пор пока амплитуда асинхронного режима $A_{ac}^2 > 0$. При $A_{ac}^2 < 0$ система теряет свойство квазиконсервативности и ведет себя как потенциально-автоколебательная. Вне полосы синхронизации автоколебания погашены и полоса начинает зависеть от величины нелинейного затухания δ_2 и δ_4 . При отсутствии автоколебания в автономном режиме, как и при параметрическом воздействии, ширина полосы зависит также и от линейного затухания δ_0 .

Для автогенератора с нелинейным контуром ($\gamma \neq 0$) как при жестком, так и при мягком режиме, амплитудные кривые в области параметрической (4) и автопараметрической (12) синхронизации несимметричные, неоднозначные, имеют наклон и ширина полосы синхронизации и режим работы существенно зависят от направления изменения расстройки. При этом при фиксированных параметрах автогенератора и воздействия можно получить существенное расширение полосы синхронизации, по сравнению с автогенератором с линейным контуром, по крайней мере при одном из направлений изменения расстройки.

На рис. 4 приведено семейство амплитудных кривых (4) при параметрическом воздействии для различных m и при постоянных, но малых значениях γ при учете (6) и (7). Из этих кривых хорошо видно наличие неоднозначности области синхронизации в зависимости от направления изменения расстройки. Как видно из рис. 4, фазовое условие устойчивости принимает вид кривой, т. е. три прямые фазового условия устойчивости при $\gamma=0$ (как изображено на рис. 3) сливаются при $\gamma \neq 0$ в одну кривую.

Для автогенератора, работающего в сложно-жестком режиме при наличии нелинейного контура, возможно параметрическое возбуждение колебаний с малыми амплитудами в узких диапазонах расстроек. Для точной оценки ширины области возбуждения и синхронизации надо учитывать амплитудное и фазовое условия устойчивости. Амплитудные кривые (рис. 4), показывают, что так же, как и в случае мягкого режима [1], максимальная расстройка существенно зависит от уменьшения или увеличения расстройки.

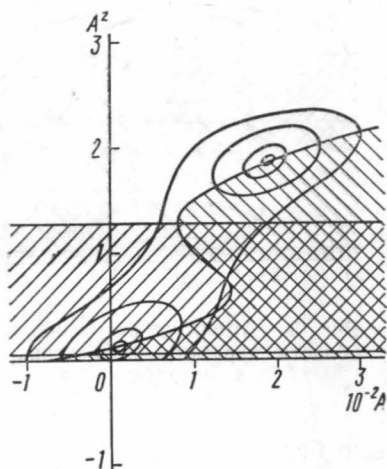


Рис. 4. Семейство амплитудных кривых (4) при параметрическом воздействии для различных m . Амплитудные кривые (1 2)

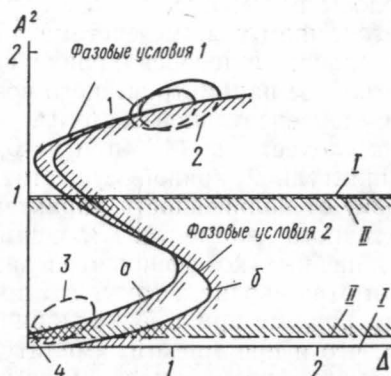


Рис. 5. a — фазовые условия 1 и $б$ — фазовые условия 2 при 1 — $\lambda_2=0,412$ и 2 — $\lambda_2=0,495$; I — амплитудные условия 1 и II — амплитудные условия 2

Приближенные выражения для граничного значения расстройки совпадают с выражениями для мягкого режима $\Delta_{гр} = \frac{3}{8\rho} \gamma A_0^2 \pm \frac{1}{4\rho} \omega_0^2 m$.

Но для сложно-жесткого режима автоколебания и синхронизация возникают при $\Delta=0$ и $m \geq m_1$ и отсутствуют при $m < m_1$. Если $m > m_1$, то колебания могут возникать и при некоторых расстройках Δ . При этом, если при $\gamma=0$ возникшие колебания раскачиваются сразу до большой стационарной амплитуды $A^2 > A_{01}^2$ (см. рис. 1), то при $\gamma=0$ за счет сильно выраженного расстроечного механизма (ухода резонансной частоты) ограничение может происходить и на малых амплитудах $A^2 \ll A_{02}^2$ (рис. 4).

На рис. 5 приведены амплитудные кривые (12). Так же как для параметрического воздействия в сложно-жестком режиме при автопараметрическом воздействии область синхронизации неоднозначна и зависит от направления изменения расстройки. Как видно из рис. 5, в интервале значений амплитуд внешнего воздействия (кроме верхних ветвей амплитудных кривых) устойчивыми могут быть и небольшие области вблизи нулевых амплитуд. При $\gamma > 0$ амплитудные кривые автопараметрической синхронизации наклонены в сторону более высоких частот. Однако в силу зависимости скелетной линии не только от амплитуды автоколебаний, но и от амплитуды вынужденных колебаний вся область оказывается сдвинутой в сторону высоких частот тем сильнее, чем больше λ .

Учитывая (12) для грубой оценки полосы автопараметрической синхронизации в автоколебательной системе при $\delta_0^* < 0$, или в сложно-жестком режиме при $\delta_0^* > 0$, но $\delta_0^* < \frac{8\delta_2^{*2}}{\delta_4}$, можно получить граничное значение расстройки области автопараметрической синхронизации при $A^2 = A_{0*}^2$:

$$\Delta_{\text{гр}} = \frac{3}{8\rho} \gamma' (A_{0*}^2 + 2\lambda^2) \pm \frac{1}{2\rho} \beta' \lambda. \quad (14)$$

Относительно скелетной линии (12а) выражение (14) дает ширину полосы синхронизации, не зависящую от затухания контура и определяемую величиной $(1/2\rho)/\beta'\lambda$, формально играющей роль члена $\frac{1}{4} m \omega_0^2$ при параметрическом воздействии.

В потенциально-автоколебательной системе при $\delta_0^* > 0$ и $\delta_0^* > 8\delta_2^{*2}/\delta_4$, граничное значение расстройки из (12) при том же приближении, т. е. при $A^2 = 0$, на границе:

$$\Delta_{\text{гр}} = \frac{3}{4\rho} \gamma' \lambda^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\rho} \beta' \lambda\right)^2 - \delta_0^*}. \quad (15)$$

В этом случае скелетная линия сдвинута относительно начала координат ($\Delta=0$). Выражение (15) также отличается от выражения при параметрическом воздействии при $\gamma \neq 0$, где $\Delta_{\text{гр}}$ симметричны относительно оси ординат ($\Delta=0$).

Экспериментальное исследование синхронных режимов автогенератора с контуром, в который в качестве нелинейной емкости включена нелинейная емкость полупроводникового диода, хорошо подтверждает приведенную теорию стационарного синхронного режима. Для области асинхронного режима и области частичного увлечения частоты [4] спектр колебаний получается достаточно сложным, так как рассматриваемые системы имеют существенную зависимость частоты от амплитуды колебаний, проявляющуюся уже в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухари А. Х. Ш., Минакова И. И., Федосеев А. Т. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 12, № 2, 1972.
2. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., 1952.
3. Королев В. И., Постников Л. В. «Изв. вузов», радиофизика, 13, № 8, 1970.
4. Коваленко А. С., Мигулин В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 3, 1971.

Поступила в редакцию
12.4 1972 г.

Кафедра
физики колебаний