

В. К. КУЗНЕЦОВ

## К РАСЧЕТУ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НА КАУСТИКЕ В ЗАДАЧЕ О ТОЧЕЧНОМ ИСТОЧНИКЕ В КЛИНЕ

Для описания поля, возбуждаемого точечным источником в клине с идеально отражающими границами, в работах [1, 2] было получено приближенное решение задачи, не применимое на каустике. Методом перевала по схеме, разработанной в ([6]), получается выражение в виде функции Эйри, описывающее поле на каустике и в зоне тени.

Волновое поле гармонического точечного источника в клине можно представить в виде ряда по нормальным волнам [1, 2]

$$\Psi = \frac{i\pi}{\Phi} W_0(r, z) + \frac{2i\pi}{\Phi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \mu\varphi_0 \cos \mu\varphi W_m(r, z). \quad (1)$$

Здесь  $\mu = m\pi/\Phi$ ,  $m$  — порядок нормальной волны,  $\Phi$  — угол раствора клина,  $r, z, \varphi$  — цилиндрические координаты (временной множитель  $e^{-i\omega t}$  опущен). Функция  $W_m(r, z)$ , описывающая распространение нормальной волны в клине, с помощью подстановки  $U_m = r_0^{-1/2} U_m(r, z)$  находится путем решения двумерного волнового уравнения для слоисто-неоднородной среды и точечного источника с координатами  $r_0, z_0$ :

$$\frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} + k_0^2 \left( 1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k_0^2 r^2} \right) U_m = -\delta(r - r_0, z - z_0). \quad (2)$$

Из (2) видно, что нормальная волна в клине распространяется как волна в среде с показателем преломления

$$n_m = \left( 1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k_0^2 r^2} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Здесь  $k_0$  — волновое число среды, заполняющей клин. В наших работах [1, 3] функция  $U_m(r, z)$ , и, следовательно, функция  $W_m(r, z)$  была определена в приближении геометрической оптики, которое, как известно, не применимо на каустике и в ее окрестности. Выражение для поля на каустике и вблизи нее можно получить асимптотическими методами из интеграль-

ной формы строгого решения уравнения (2), которое получается по стандартной для такого рода задач схеме, впервые примененной [4]. Интеграл конструируется из решений более простого уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4k_0^2 r^2}\right) U = -\delta(r - r_0) \quad (4)$$

с учетом условий погашаемости на бесконечности и заданной особенности в точке источника  $r=r_0, z=z_0$ . Уравнение (4) имеет решение:

$$U = \sqrt{rr_0} J_\mu(\beta r) H_\mu^{(1)}(\beta r_0) e^{ik_0 \zeta z}, \quad r \leq r_0$$

$$U = \sqrt{rr_0} J_\mu(\beta r_0) H_\mu^{(1)}(\beta r) e^{ik_0 \zeta z}, \quad r \geq r_0. \quad (5)$$

Здесь  $J_\mu$  и  $H_\mu^{(1)}$  — цилиндрические функции,  $\beta = k_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Величина  $\zeta$  имеет смысл косинуса угла  $\gamma$  между направлением распространения волны в бесконечно удаленной области  $r = \infty$  и направлением оси  $z$ .

Теперь запишем решение уравнения (2) в интегральной форме:

$$U_m = \sqrt{rr_0} \int_{-\infty}^{+\infty} J_\mu(\beta r) H_\mu^{(1)}(\beta r_0) e^{ik_0 \zeta z} d\zeta, \quad r \leq r_0, \quad (6)$$

$$U_m = \sqrt{rr_0} \int_{-\infty}^{+\infty} J_\mu(\beta r_0) H_\mu^{(1)}(\beta r) e^{ik_0 \zeta z} d\zeta, \quad r \geq r_0. \quad (6')$$

Решение (5) представляет собой аналог плоской волны, возбуждаемой в плоскости  $r=r_0$ , а решение (6) — аналог цилиндрической волны в виде суперпозиции «плоских» волн, распространяющихся по всевозможным направлениям  $\gamma = \arccos \zeta$ . Из бесконечных пределов интегрирования следует, что углы  $\gamma$  принимают и комплексные значения, представляющие неоднородные «плоские» волны.

Асимптотическими методами можно получить приближенные оценки интегралов (6), пригодные для описания поля на каустике и в ее окрестности. Для этого прежде всего следует заменить подынтегральные выражения в (6) их ВКБ-приближением

$$J_\mu(\beta r) H_\mu^{(1)}(\beta r_0) e^{ik_0 \zeta z} \approx \frac{1}{\pi} [(\beta^2 r_0^2 - \mu^2)(\beta^2 r^2 - \mu^2)]^{-1/4} \times$$

$$\times \left\{ e^{i[k_0 \zeta z + \sqrt{\beta^2 r^2 - \mu^2} + \sqrt{\beta^2 r_0^2 - \mu^2} - \mu (\arccos \mu/\beta r + \arccos \mu/\beta r_0) - \pi/2]} + \right.$$

$$\left. + e^{i[k_0 \zeta z - \sqrt{\beta^2 r^2 - \mu^2} + \sqrt{\beta^2 r_0^2 - \mu^2} + \mu (\arccos \mu/\beta r - \arccos \mu/\beta r_0)]} \right\}, \quad (7)$$

$$J_\mu(\beta r_0) H_\mu^{(1)}(\beta r) e^{ik_0 \zeta z} \approx \frac{1}{\pi} [(\beta^2 r_0^2 - \mu^2)(\beta^2 r^2 - \mu^2)]^{-1/4} \times$$

$$\times \left\{ e^{i[k_0 \zeta z + \sqrt{\beta^2 r^2 - \mu^2} + \sqrt{\beta^2 r_0^2 - \mu^2} - \mu (\arccos \mu/\beta r + \arccos \mu/\beta r_0) - \pi/2]} + \right.$$

$$\left. + e^{i[k_0 \zeta z + \sqrt{\beta^2 r^2 - \mu^2} - \sqrt{\beta^2 r_0^2 - \mu^2} - \mu (\arccos \mu/\beta r - \arccos \mu/\beta r_0)]} \right\}.$$

Из (7) видно, что в ВКБ-приближении «плоские» волны (6) разделяются на прямые волны и волны, отраженные в результате рефракции. Место отражения определяется линией точек поворота  $r = \mu/\beta$ . Выражения в экспонентах получаются интегрированием вдоль луча  $\int n_m ds$ , где  $n_m$  определяется формулой (3). В отраженной волне луч

проходит через точку поворота и к величине фазового интеграла добавляется  $-\pi/2$  за счет скачка фазы в точке поворота. Далее удобно перейти от угла  $\gamma = \arcs \cos \zeta$ , определяющего направление волны в  $r = \infty$ , к углу  $\vartheta_0 = \arcs \cos \xi$ , определяющему направление волны в  $r = r_0$ . Переход осуществляется соотношением Снеллиуса:

$$n_m(\infty) \cos \gamma = n_m(r_0) \cos \vartheta_0.$$

Обозначив  $\cos \vartheta_0$  через  $\xi$  и подставив  $n_m$ , из (3) получим  $\zeta = \xi \frac{\sqrt{r_0^2 - k^2}}{r_0}$ , где  $k = \mu/k_0$ . Удобно ввести обозначение  $\sin \psi_0 = \frac{\sqrt{r_0^2 - k^2}}{r_0}$ . Тогда выражения в экспонентах (эйконал), которые мы обозначим через  $\eta$ , запишутся в таком виде:

$$\eta = \sin \psi_0 \xi z \pm \left[ \sqrt{(1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0) r^2 - k^2} - \sqrt{(1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0) r_0^2 - k^2} - k \arccos \frac{k}{r \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0}} + k \arccos \frac{k}{r_0 \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0}} \right]$$

до точки поворота. Знак плюс берется при  $r < r_0$ , знак минус — при  $r > r_0$ .

$$\eta = \xi z \sin \psi_0 - \left[ \sqrt{(1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0) r^2 - k^2} + \sqrt{(1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0) r_0^2 - k^2} - k \arccos \frac{k}{r \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0}} - k \arccos \frac{k}{r_0 \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \psi_0}} + \frac{\pi}{2k_0} \right] \quad (8)$$

после точки поворота. Выражения вида (8) были получены [5] интегрированием уравнения эйконала.

Таким образом, вместо интегралов (6) в результате перехода к ВКБ-представлению подынтегральных функций имеем интегралы вида

$$J = \sin \psi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi, r, r_0) e^{ik_0 \eta} d\xi, \quad (9)$$

где

$$R(\xi, r, r_0) = [(1 - \sin^2 \psi_0 \xi^2) r^2 - k^2]^{-1/4} [(1 - \sin^2 \psi_0 \xi^2) r_0^2 - k^2]^{-1/4}.$$

Для оценки интеграла (9) применим метод перевала. Стационарные или перевальные точки  $\xi_0$  определяются условием

$$\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \xi_0} = 0. \quad (10)$$

Применим его к выражениям (8), получим соответственно

$$\eta' = z \pm \frac{\xi_0 \sin \psi_0}{1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0} [\sqrt{r^2 (1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0) - k^2} - \sqrt{r_0^2 (1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0) - k^2}] = 0. \quad (11)$$

$$\eta' = z - \frac{\xi_0 \sin \psi_0}{1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0} [\sqrt{r^2 (1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0) - k^2} + \sqrt{r_0^2 (1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0) - k^2}] = 0. \quad (11')$$

Уравнения (11) определяют стационарные точки  $\xi_0$  в виде функций координат  $r, z$  и являются не чем иным, как уравнениями лучей в смыс-

ле геометрической оптики, расходящихся из точечного источника  $r=r_0$ ,  $z=0$  под углами  $\vartheta_0$  относительно направления оси  $z$ , как изображено на рис. 2. Уравнение (11) со знаком плюс описывает часть траектории луча, вышедшего под углом  $-\pi < \vartheta_0 < 0$ , от точки источника  $r=r_0$ ,  $z=0$  до точки поворота, координаты которой

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0}}, \quad (12)$$

$$z = \frac{\xi_0 \sin \psi_0}{1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0} \sqrt{r_0^2 (1 - \xi_0^2 \sin^2 \psi_0) - k^2}. \quad (13)$$

Взятое со знаком минус уравнение (11) описывает лучи, вышедшие под углами  $0 < \vartheta_0 < \pi$ , не имеющими точек поворота. Уравнение (11')

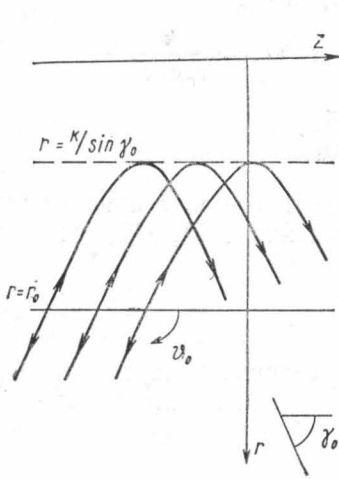


Рис. 1

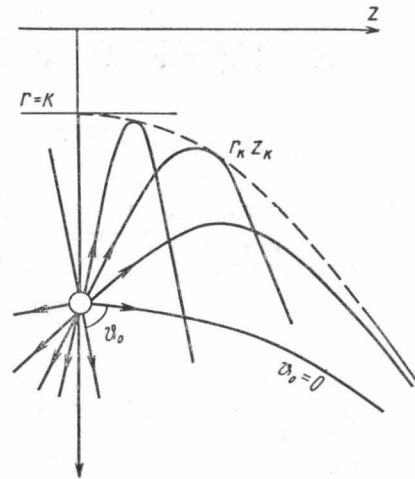


Рис. 2

описывает ту часть траектории луча  $-\pi < \vartheta_0 < 0$ , что лежит за точкой поворота (рис. 2). Уравнения (11) определяют  $\xi_0$  как двузначную функцию координат  $r, z$ : каждой точке наблюдения  $r$  и  $z$  освещенной области, за исключением каустики, соответствуют две перевальные точки  $\xi_{01}$  и  $\xi_{02}$ . Это означает, что в данную точку наблюдения приходят два луча. Их углы выхода  $\vartheta_{01} = \arccos \xi_{01}$  и  $\vartheta_{02} = \arccos \xi_{02}$ .

Методом перевала, взяв два члена в разложении эйконала

$$\eta = \eta(\xi_0) + \frac{1}{2} (\xi - \xi_0)^2 \frac{[\partial^2 \eta(\xi_0)]}{\partial \xi^2}, \quad (14)$$

находим

$$J(r, z) = \sin \psi_0 \sum_{\xi_{0j}=1,2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0}} \frac{R(\xi_{0j}, r, r_0) e^{ik_0 \eta(\xi_{0j}) - i\pi/4}}{\sqrt{|\eta''(\xi_{0j})|}}. \quad (15)$$

В соответствии с (15) выражение для функции  $W(r, z)$  получается в виде суммы двух функций, соответствующих прямой волне и волне рефрагированной:

$$W(r, z) = W_-(r, z) + W_+(r, z). \quad (16)$$

Выражение (15), а следовательно, и выражение (16) в координатах  $r, z$  принимают чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому мы приведем выражение функции  $W$  в эллиптических координатах, более подходящих для решения задачи в волновом поле точечного источника в клине (в пространстве трех измерений это эллипсоидальная система координат) [5]:  $r=r_0 \operatorname{ch} v \sin u$ ;  $z=r_0 \operatorname{sh} v \cos u$ .

$$W_{\mp} = \sqrt{\frac{2\pi}{k_0}} [V r_0^2 \operatorname{ch}^2 v - k^2 \mp V r_0^2 \sin^2 u - k^2]^{-1/2} \times \\ \times [(r_0^2 \operatorname{ch}^2 v - k^2)(r_0^2 \sin^2 u - k^2)]^{-1/4} e^{ik_0 \eta_{\mp} - i\pi/4}; \quad (17)$$

$$\eta_{-} = \sqrt{r_0^2 \operatorname{ch}^2 v - k^2} - \sqrt{r_0^2 \sin^2 u - k^2} - \\ - k \left( \arccos \frac{k}{r_0 \operatorname{ch} v} - \arccos \frac{k}{r_0 \sin u} \right); \quad (18)$$

$$\eta_{+} = \sqrt{r_0^2 \operatorname{ch}^2 v - k^2} + \sqrt{r_0^2 \sin^2 u - k^2} - k \left( \arccos \frac{k}{r_0 \operatorname{ch} v} + \right. \\ \left. + \arccos \frac{k}{r_0 \sin u} \right) - \frac{\pi}{2k_0}.$$

Эти результаты были получены нами ранее [1, 5] более прямым путем — методом геометрической оптики. Выражения (15), (17) не применимы на каустике, где  $\eta''(\xi_0) = 0$ ,

$$r_0^2 \sin^2 u - k^2 = 0. \quad (19)$$

Для вывода соответствующих выражений, применимых на каустике и в ее окрестности, как указывалось [1], можно воспользоваться методом Л. М. Бреховских [6].

На каустике выполняются условия

$$\eta'(\xi_{0k}, r_k, z_k) = 0 \text{ и } \eta''(\xi_{0k}, r_k) = 0. \quad (20)$$

Из них находятся координаты точек каустики  $r_k$  и  $z_k$  через  $\xi_{0k}$ :

$$r_k = k \sqrt{\frac{r_0^2 - k^2 \xi_{0k}^2}{r_0^2 (1 - \xi_{0k}^2)}}; \quad z_k = \frac{(r_0^2 - k^2) \xi_{0k}}{r_0 \sqrt{1 - \xi_{0k}^2}}. \quad (21)$$

Окрестность каустики определяется здесь как окрестность точки  $r_k, z_k$  при фиксированном значении  $r=r_k$ . Координата  $z$  изменяется при этом в окрестности значения  $z=z_k$ . Поскольку  $\eta''(\xi_{0k}, r_k) = 0$ , в разложении эйконала следует учесть кубичный член

$$\eta = \eta(\xi_{0k}, r_k, z_k) + \eta'(\xi_{0k}, r_k, z) (\xi - \xi_{0k}) + 1/6 \eta'''(\xi_{0k}, r_k) (\xi - \xi_{0k})^3. \quad (22)$$

Из (11') видно, что

$$\eta'(\xi_{0k}, r_k, z) = z - z_k. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (9) и вынося за знак интеграла медленно меняющийся множитель, получаем

$$J = \sin \psi_0 R(\xi_{0k}, r_k, r_0) e^{ik_0 \eta(\xi_{0k})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0(z-z_k)(\xi-\xi_{0k}) + 1/6 \eta'''(\xi_{0k})(\xi-\xi_{0k})^3} d\xi. \quad (24)$$

Здесь

$$\xi_{0k} = \frac{r_0 \sqrt{r_k^2 - k^2}}{\sqrt{r_0^2(r_k^2 - k^2) + (r_0^2 - k^2)k^2}}, \quad (25)$$

как следует из первого уравнения (21). Вводя новую переменную интегрирования  $S = 2^{-1/3} |\eta'''(\xi_{0k})|^{1/3} (\xi - \xi_{0k})$  и переходя от экспонент к косинусу, получаем

$$J = 2^{1/3} \sin \psi_0 |\eta'''(\xi_{0k})|^{-1/3} R(\xi_{0k}, r_k, r_0) v(t) e^{ik_0 \eta(\xi_{0k})}. \quad (26)$$

Через  $v(t)$  обозначена функция Эйри

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos(S^3/3 + St) dS,$$

$$t = 2^{1/3} \eta'(\xi_{0k}) |\eta'''(\xi_{0k}) k_0|^{-1/3}.$$

Переходя в (26) от  $\xi_{0k}$  к  $r_{0k}$ , по формуле (25) с учетом

$$\eta'''(r_k) = \frac{[r_0^2(r_k^2 - k^2) + k^2(r_0^2 - k^2)]^3}{r_0^2 k^5 (r_k^2 - k^2)^{3/2} (r_0^2 - k^2)^{1/2}},$$

получим выражение для поля нормальной волны  $m$ -го порядка в клине от точечного источника на каустике и вблизи нее:

$$W_m(r_k, z) = \frac{2^{1/3} k_0^{1/3} k^{2/3} \sin^{1/3} \psi_0}{\sqrt{r_0^2(r_k^2 - k^2) + (r_0^2 - k^2)k^2}} e^{ik_0 \eta(r_k)} v(t);$$

$$\eta(r_k) = \frac{1}{k} \sqrt{(r_0^2 - k^2)k^2 + r_0^2(r_k^2 - k^2)} - k \operatorname{arctg} \frac{k^2}{\sqrt{r_0^2(r_k^2 - k^2) + (r_0^2 - k^2)k^2}} - \frac{\pi}{2k_0};$$

$$t = 2^{1/3} (z - z_k) \frac{k_0^{-1/3} r_0^{2/3} k^{5/3} (r_k^2 - k^2)^{1/2} (r_0^2 - k^2)^{1/6}}{r_0^2 (r_k^2 - k^2) + (r_0^2 - k^2)k^2}.$$

Методом перевала легко получается и другая асимптотическая оценка интеграла (6') — выражение для поля в бесконечно удаленной области  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \infty$ . В самом деле, заменив в интеграле (6') функцию Ханкеля ее асимптотическим представлением

$$H_\mu^{(1)}(k_0 r \sin \gamma) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r \sin \gamma}} e^{i[k_0 r \sin \gamma - \pi/2(\mu + 1/2)]}$$

и перейдя к полярной системе координат  $r = \rho \sin \gamma_0$ ,  $z = \rho \cos \gamma_0$ , получим

$$|U_m^-| = \sqrt{\frac{2r_0}{\pi r}} \int_{-\infty}^{+\infty} J_\mu(k_0 r_0 \sin \gamma_0) e^{ik_0 \rho \cos \gamma(\gamma - \gamma_0)} \sqrt{k_0 \sin \gamma} d\gamma.$$

Точка перевала  $\gamma = \gamma_0$ , и, следовательно,

$$W_m|_\infty = \frac{e^{i(k_0 \rho - \mu\pi/2 - \pi/4)}}{\rho} J_\mu(k_0 r_0 \sin \gamma_0).$$

Функция  $J_\mu(k_0 r_0 \sin \gamma_0)$ , полученная сначала [1] в приближении геометрической оптики, имеет смысл характеристики направленности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. К. «Акустический журнал», 5, 170—175, 1959.
2. Кузнецов В. К. В сб. докладов VI Всесоюзной акустической конференции. М., 1968.
3. Кузнецов В. К. «Акустический журнал», 13, 221—230, 1967.
4. Pekeris C. L. JASA, 18, 295, 1946.
5. Кузнецов В. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 4, 14—21, 1967.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1957, стр. 432.

Поступила в редакцию  
26.4 1972 г.

Кафедра  
акустики