Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1973

УДК 536.70

А. М. ТОБОЛЬЦЕВ

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ

Получены точные решения обобщенных уравнений диффузии, введенных А. А. Власовым [1], и проведено сравнение этих решений с соответствующими решениями обычного уравнения диффузии.

Решение типа Шоттки обобщенного уравнения амбиполярной диффузии

Исходя из законов сохранения для статистических функций распределения, переходом к конечным разностям можно получить следующие обобщенные уравнения диффузии с учетом дрейфа для ионного и электронного компонентов соответственно [5]:

$$\frac{1}{\tau_i}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\tau_i^{\mu}\frac{\partial^{\mu}\rho_i}{\partial t^{\mu}}-\frac{1}{\tau_i}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\left(\tau_i^2\frac{\theta_i}{2m_i}\right)^{\mu}\Delta^{\mu}\rho_i-$$

$$-\frac{1}{\tau_i}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}(-\tau_i)^{\mu}(b_i\vec{E}\vec{\nabla})^{\mu}\rho_i=\beta\rho_e, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\tau_e}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\tau_e^{\mu}\frac{\partial^{\mu}\rho_e}{\partial t^{\mu}}-\frac{1}{\tau_e}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\left(\tau_e^2\frac{\theta_e}{2m_e}\right)^{\mu}\Delta^{\mu}\rho_e+$$

$$+\frac{1}{\tau_e}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}(-\tau_e)^{\mu}(b_e\vec{E}\vec{\nabla})^{\mu}\rho_e=\beta\rho_e. \tag{2}$$

В стационарном случае предположим, следуя Шоттки [2], что ионная и электронная плотности одинаковы

$$\rho_i(\bar{r},t)=\rho_e(\bar{r},t)=\rho(\bar{r},t)$$

и что скорости движения ионов и электронов одинаково зависят от напряженности поля, что приводит к условию $\tau_i b_i=\tau_e b_e$. Умножая (1) на τ_i, (2) — на τ_e и складывая, получаем обобщенное уравнение амбиполярной диффузии в стационарном случае

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\frac{(\tau_i D_i)^{\mu}+(\tau_e D_e)^{\mu}}{\tau_i+\tau_e}\Delta^{\mu}\rho=\beta\rho, \tag{3}$$

которое в первом приближении дает обычное уравнение амбиполярной диффузии.

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\rho=\rho_0 J_0(ar) \tag{4}$$

с граничным условием $\rho(R)=0$.

Подстановка (4) в (3) приводит к условию

$$e^{-\tau_i D_i a^2}+e^{-\tau_e D_e a^2}=2-(\tau_i+\tau_e)\beta, \tag{5}$$

которое определяет единственное значение a. Граничное условие дает $aR=\mu_0^{(1)}$.

В первом приближении условие (5) переходит в условие Шоттки $a=\sqrt{\frac{\beta}{D_a}}$, и решение (4) — в решение Шоттки. Из сравнения условия (5) с условием Шоттки $a=\sqrt{\frac{\beta}{D_a}}$ можно получить, что $a_{\text{обобщ}}>a_{\text{ш}}$ или $R_{\text{обобщ}}<R_{\text{ш}}$, т. е. рассмотрение обобщенного уравнения диффузии вместо обычного уравнения приводит к сжатию функции плотности и сокращению радиуса положительного столба.

О росте биологических структур. Существование фронта волны для обобщенного уравнения диффузии при наличии источника

Ставится следующая задача:

$$\frac{1}{\tau}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\tau^{\mu}\frac{\partial^{\mu}\rho}{\partial t^{\mu}}-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\left(\tau^2\frac{\theta}{2m}\right)^{\mu}\Delta^{\mu}\rho\right\}=F(\rho),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\rho=\rho^{(2)},\quad \lim_{x\to-\infty}\rho=\rho^{(1)},\quad \rho^{(2)}>\rho>\rho^{(1)}>0, \tag{6}$$

$$F(\rho)\geqslant 0,\quad F(\rho)=0 \text{ при } \rho=\rho^{(2)} \text{ и } \rho=\rho^{(1)}.$$

Для обычного уравнения диффузии эта задача рассмотрена в [3]. Упрощая задачу, будем считать, что $F(\rho)$ имеет вид

$$F(\rho)=\begin{cases} A(\rho-\rho^{(1)}), & \rho^{(1)}\leqslant\rho\leqslant\rho_{\text{ср}},\\ -B(\rho-\rho^{(2)}), & \rho_{\text{ср}}\leqslant\rho\leqslant\rho^{(2)},\end{cases}$$

где $\rho_{\text{ср}}=\dfrac{A\rho^{(1)}+B\rho^{(2)}}{A+B}$.

Будем искать решение в виде

$$\rho=\begin{cases}\rho^{(2)}-C_2e^{-(kx+\omega t)}, & \rho_{\text{ср}}\leqslant\rho\leqslant\rho^{(2)}\\ \rho^{(1)}+C_1e^{(kx+\omega t)}, & \rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_{\text{ср}}\end{cases}$$

или, сшивая эти куски,

$$\rho=\begin{cases}\rho^{(1)}+\dfrac{B}{A+B}\left(\rho^{(2)}-\rho^{(1)}\right)e^{(kx+\omega t)-(kx+\omega t)_0}, & (kx+\omega t)\leqslant(kx+\omega t)_0\\[2ex] \rho^{(2)}-\dfrac{A}{A+B}\left(\rho^{(2)}-\rho^{(1)}\right)e^{(kx+\omega t)_0-(kx+\omega t)}, & (kx+\omega t)\geqslant(kx+\omega t)_0,\end{cases}\tag{7}$$

где $(kx+\omega t)_0$ — точка сшивания, которая является транслятивной произвольной постоянной.

Подстановка правого и левого вида решения (7) в уравнение (6) дает

$$e^{\omega\tau}=e^{\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2}+A\tau,\quad e^{-\omega\tau}=e^{\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2}-B\tau,$$

откуда

$$k=\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\theta}{2m}}}\sqrt{\ln\left[\frac{B\tau-A\tau}{2}+\sqrt{1+\left(\frac{B\tau+A\tau}{2}\right)^2}\right]},$$

$$\omega=\frac{1}{\tau}\ln\left[\frac{B\tau+A\tau}{2}+\sqrt{1+\left(\frac{B\tau+A\tau}{2}\right)^2}\right],$$

$$v_\text{ф}=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{\theta}{2m}}\,\frac{\ln\left[\dfrac{B\tau+A\tau}{2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{B\tau+A\tau}{2}\right)^2}\right]}{\sqrt{\ln\left[\dfrac{B\tau-A\tau}{2}+\sqrt{1+\left(\dfrac{B\tau+A\tau}{2}\right)^2}\right]}},\tag{8}$$

причем решение (7), (8) справедливо при $A\tau<\dfrac{B\tau}{1-B\tau}$ (см. рис. 1). Выражения (8) для k, ω и $v_\text{ф}$ упрощаются, если наложить на решение (7) условие гладкости (тогда $A=B$):

$$k=\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\theta}{2m}}}\sqrt{\ln\sqrt{1+(A\tau)^2}},\quad \omega=\frac{1}{\tau}\ln\left[A\tau+\sqrt{1+(A\tau)^2}\right],$$

$$v_\text{ф}=\sqrt{\frac{\theta}{2m}}\,\frac{\ln\left[A\tau+\sqrt{1+(A\tau)^2}\right]}{\sqrt{\ln\sqrt{1+(A\tau)^2}}}.\tag{9}$$

Для решения (7), (9) существенно бесконечное число производных в уравнении (6): для обычного уравнения диффузии такого гладкого решения нет.

Фазовая скорость оказывается пропорциональной тепловой [1, 3]. Из (9) видно, что существует предел фазовой скорости при $A\tau\to 0$: $\lim\limits_{A\tau\to 0}v_\text{ф}=\sqrt{\dfrac{\theta}{m}}$, которая оказывается минимальной.

Для обобщенного уравнения диффузии с общей конечно-разностной схемой

$$\frac{1}{\tau}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\tau^\mu\left[\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^\mu-(-1)^\mu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^\mu\right]\frac{\partial^\mu\rho}{\partial t^\mu}+\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\left(\tau^2\frac{\theta}{2m}\right)^{\mu}\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^{2\mu}-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^{2\mu}\right]\Delta^{\mu}\rho\Big\}=F(\rho)$$

подстановка решения (7) приводит к системе

$$e^{\alpha\omega\tau}\cdot\operatorname{sh}\frac{\omega\tau}{2}=\frac{A\tau}{2}+e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2}\cdot\operatorname{sh}|\beta|\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2,$$

$$e^{-\alpha\omega\tau}\cdot\operatorname{sh}\frac{\omega\tau}{2}=\frac{B\tau}{2}-e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2}\cdot\operatorname{sh}|\beta|\tau^2\frac{\theta}{2m}k^2, \tag{11}$$

которая определяет единственные значения ω и k.

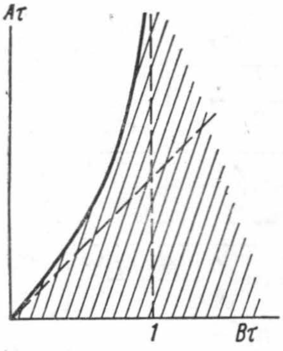

Рис. 1

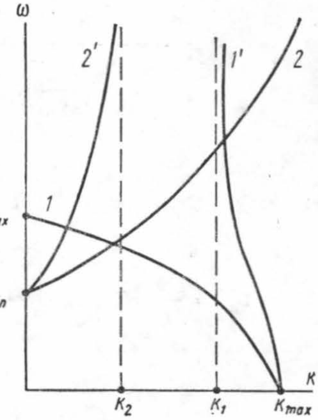

Рис. 2

Действительно, когда k изменяется от нуля до $k_{\max}$, определяемого равенством

$$e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2\frac{\theta}{2m}k_{\max}^2}\cdot\operatorname{sh}|\beta|\tau^2\frac{\theta}{2m}k_{\max}^2=\frac{B\tau}{2},$$

правая часть второго уравнения системы (11) убывает от $\frac{B\tau}{2}$ до нуля, при этом ω убывает от $\omega_{1\max}$, определяемого равенством

$$e^{-\alpha\omega_{1\max}\tau}\cdot\operatorname{sh}\frac{\omega_{1\max}\tau}{2}=\frac{B\tau}{2},$$

до нуля при любых $|\beta|$ и α. Итак, функция $\omega=\omega_1(k)$, определяемая вторым уравнением системы (11), является убывающей (см. рис. 2, кривые *1* и *1'*). Аналогично, когда k изменяется от нуля до бесконечности, правая часть первого уравнения системы (11) растет от $\frac{A\tau}{2}$ до бесконечности, при этом ω растет от $\omega_{2\min}$, определяемого равенством

$$e^{\alpha\omega_{2\min}\tau}\cdot\operatorname{sh}\frac{\omega_{2\min}\tau}{2}=\frac{A\tau}{2},$$

до бесконечности при любых $|\beta|$ и $\alpha > -\frac{1}{2}$. Итак, функция $\omega=\omega_2(k)$, определяемая первым уравнением системы (11), является возрастающей (см. рис. 2, кривые *2, 2'*). Кривая *1* : $\omega=\omega_1(k)$, $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ и $\alpha=\frac{1}{2}$ при $B\tau<1$, $k_{\max}$ и $\omega_{1\max}$ определяются из равенств

$$e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2 \frac{\theta}{2m} k_{\max}^2} \cdot \operatorname{sh} |\beta| \tau^2 \frac{\theta}{2m} k_{\max}^2 = \frac{B\tau}{2},$$

$$e^{-\alpha\omega_{1\max}\tau} \cdot \operatorname{sh} \frac{\omega_{1\max}\tau}{2} = \frac{B\tau}{2}.$$

Кривая *1'*: $\omega=\omega_1(k)$, $\alpha=\frac{1}{2}$ при $B\tau>1$ и k_1 определяется из равенства

$$e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2 \frac{\theta}{2m} k_1^2} \cdot \operatorname{sh} |\beta| \tau^2 \frac{\theta}{2m} k_1^2 = \frac{B\tau-1}{2}.$$

Кривая *2*: $\omega=\omega_2(k)$, $-\frac{1}{2}<\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $\omega_{2\min}$ определяется из равенства

$$e^{\alpha\omega_{2\min}\tau} \cdot \operatorname{sh} \frac{\omega_{2\min}\tau}{2} = \frac{A\tau}{2}.$$

Кривая *2'*: $\omega=\omega_2(k)$, $\alpha=-\frac{1}{2}$. При этом $A\tau<1$, k_2 определяется из равенства

$$e^{\left(\frac{1}{4}+\beta^2\right)\tau^2 \frac{\theta}{2m} k_2^2} \cdot \operatorname{sh} |\beta| \tau^2 \frac{\theta}{2m} k_2^2 = \frac{1-A\tau}{2}.$$

Так как возрастающая и убывающая функции пересекаются только в одной точке, то единственность ω и k, определяемых системой (11), доказана. Область существования решения $\omega_{1\max}>\omega_{2\min}$ (условие на коэффициенты A и B).

Решение обобщенного уравнения диффузии для начального условия типа δ-функции

Ставится задача

$$\frac{\partial\rho(\bar{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{\tau}\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\left(\tau^2 \frac{\theta}{2m}\right)^{\mu} \Delta^{\mu}\rho = 0,$$

$$\rho(\bar{r}, 0) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} r_0)^3} e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}. \quad (12)$$

В уравнении (12) взята первая производная по времени, чтобы математическая постановка задачи была стандартной. Функция $\rho(\bar{r}, 0)$ нормирована на единицу и при $r_0 \to 0$ стремится к трехмерной δ-функции.

Перейдем к Фурье-образам

$$\tilde{\rho}(\vec{k}, t) = \exp\left\{\left(e^{-\tau^2 \frac{\theta}{2m} k^2} - 1\right)\frac{t}{\tau} - \frac{r_0^2 k^2}{4}\right\}.$$

Совершая обратное преобразование Фурье, получаем

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} k^2 \exp\left\{\left(e^{-\tau^2 \frac{\theta}{2m} k^2} - 1\right)\frac{t}{\tau} - \frac{r_0^2 k^2}{4}\right\} dk.$$

Соответствующее решение для обычного уравнения диффузии

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{[\pi(4Dt + r_0^2)]^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt + r_0^2}}.$$

Замечание. Для произвольного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n)}(z) = \Phi(z)$$

имеют место следующие теоремы [4]:

Теорема 1. Функция $z^S e^{\alpha z}$, где α — корень характеристического уравнения кратности $S+1$, удовлетворяет уравнению $L(F)=0$.

Теорема 2. Система функций $\{z^S e^{\alpha_k z}\}$ является полной, т. е.

$$F(z) = \sum_{|\alpha_k| \leqslant \theta} P_k(z) e^{\alpha_k z}$$

(сумма взята по всем нулям характеристического уравнения в круге $|t| \leqslant \theta$, степень $P_k(z)$ меньше кратности корня α_k).

Обобщенное уравнение диффузии

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \tau^\mu \frac{\partial^\mu \rho}{\partial t^\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!}\left(\tau^2 \frac{\theta}{2m}\right)^\mu \Delta^\mu \rho = 0 \tag{13}$$

является уравнением в частных производных, однако, переходя к Фурье-образам, получим обыкновенное уравнение

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \tau^\mu \frac{d^\mu \tilde{\rho}(\vec{k}, t)}{dt^\mu} - \left(e^{-\tau^2 \frac{\theta}{2m} k^2} - 1\right)\tilde{\rho}(\vec{k}, t) = 0,$$

к которому применимы теоремы 1 и 2. Характеристическая функция $\varphi(k, t) = e^{\tau t} - e^{-\tau D k^2}$ имеет все корни кратности единица. Поэтому

$$\tilde{\rho}(\vec{k}, t) = e^{-Dk^2 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(k) e^{i\frac{2\pi n}{\tau} t}.$$

Фурье-образ определяется с точностью до независимых произвольных констант $C_n(k)$, которые должны быть заданы через начальные условия. В частности, полагая $C_n(k)=0$, $n \neq 0$ и $C_0(k) \neq 0$, получаем теорему: всякое решение обычного уравнения диффузии является в то же время решением обобщенного уравнения диффузии (13).

Это утверждение может быть доказано непосредственно, если записать (13) в виде

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu!} \tau^{\mu} \left(\frac{\partial^{\mu} \rho}{\partial t^{\mu}} - D^{\mu} \Delta^{\mu} \rho \right) = 0$$

и показать математической индукцией, что

$$\frac{\partial^{\mu} \rho}{\partial t^{\mu}} = D^{\mu} \Delta^{\mu} \rho.$$

В заключение выражаю благодарность проф. А. А. Власову за постановку рассмотренных задач и систематические консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
2. Shottky W. Phys. Zs., **25**, 342, 1924.
3. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Бюллетень МГУ, математика, механика, **1**, вып. 6, 1937.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., 1967.
5. Тобольцев А. М. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **14**, № 5, 1973.

Поступила в редакцию
23.6 1972 г.

Кафедра
теоретической физики