Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1973

А. В. ГУСЕВ, В. Н. РУДЕНКО

АНАЛИЗ СОВПАДЕНИЙ В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Решена статистическая задача обнаружения импульсного сигнала при работе по схеме совпадений в экспериментах по поиску гравитационного излучения от внеземных источников.

В экспериментах по нахождению гравитационного излучения от внеземных объектов регистрировались совпадающие во времени всплески двух пространственно-разнесенных антенн [1]. Превышение наблюдаемой частоты совпадений над средней ожидаемой частотой обусловило выводы о наличии внешнего (гравитационного) воздействия, сделанные в [1]. При этом был опущен вопрос об оценке значимости наблюдаемого расхождения. Как известно, статистически корректное суждение может быть сделано в рамках указания ошибок 1-го и 2-го рода (последнее требует априорного знания статистики исследуемого процесса). В данной заметке эта задача решена в предположении о тепловом характере шума гравитационного детектора (идеальная сейсмическая и магнитная изоляция) и для модели сигнала в виде последовательности случайных редких импульсов.

Распределение числа случайных совпадений

Каждый гравитационный детектор можно рассматривать как броуновский осциллятор с заданными параметрами: массой m, частотой ω_0, временем релаксации τ^* и температурой T_0 [2]. При подсчете одновременных выбросов амплитуды колебаний такого осциллятора следует учесть конечную временную разрешающую способность по совпадению τ_p; тогда для среднего числа совпадений на интервале T получим

$$\langle N_e \rangle = 2N_1 N_2 \tau_p T, \tag{1}$$

где $N_{1(2)}$ — среднее число выбросов в единицу времени над уровнем (c) амплитуды первого (второго) детектора. При тепловой природе флуктуаций детектора имеем $N_{1(2)} = N_r = (2\tau^*)^{-1} \dfrac{c}{\sigma} \exp\left\{-\dfrac{c^2}{2\sigma^2}\right\}$ [3]; вероятность появления (n)-совпадений за время T при $c \gg \sigma$ может быть с достаточным приближением [3] вычислена по закону Пуассона с параметром [1].

Кроме простого подсчета совпадающих всплесков в экспериментах типа [1] разумно ввести дополнительное условие отбора — требование идентичности формы всплесков. Для коротких воздействий (см. [2]) на детектор с большой добротностью $Q(\hat{\tau}\ll\tau^*)$ максимум информации несет фронт отклика [4], поэтому «идентичность формы» в значительной степени сводится к требованию одинаковой крутизны фронта всплесков. В связи с этим интересно оценить среднее число совпадений для «крутых всплесков» — таких, при которых изменение амплитуды ΔA превышает заданную величину ΔA_0 внутри выбранного интервала $\Delta t_0\ll\tau^*$ (или с производной, превышающей значение $\Delta A_0/\Delta t_0$). Это число в соответствии с общей теорией выбросов случайных процессов равно

$$N_{\text{кр}} = N_r \exp\left\{-\frac{\Delta A_0^2}{2\sigma^2}\left(\frac{\tau^*}{\Delta t_0}\right)\right\}. \tag{2}$$

Выражение (2) дает возможность подсчитать число крутых пересечений при заданном отношении c/σ. Если известно полное число крутых всплесков независимо от уровня, то (2) следует усреднить по c/σ, что дает

$$N_{\text{кр}} = (2\tau^*)^{-1} \exp\left\{-\frac{\Delta A_0^2}{2\sigma^2}\left(\frac{\tau^*}{\Delta t_0}\right)\right\}. \tag{3}$$

Вероятность появления n — «крутых совпадений», по-прежнему вычисляется по закону Пуассона с использованием (1), куда вместо N_r подставляется (2) или (3).

Реально наблюдаемое число совпадений N_e (произвольных или с «крутым фронтом») с достоверностью $(1-\alpha)$ лежит внутри интервала $a = \langle N_0\rangle - t_\alpha\sqrt{\langle N_c\rangle} \leqslant N_c \leqslant \langle N_c\rangle + t_\alpha\sqrt{\langle N_c\rangle} = b$, где число t_α определяется условием

$$\frac{\Gamma(a+1,\ \langle N_c\rangle)}{\Gamma(a+1)} - \frac{\Gamma(b+1;\ \langle N_c\rangle)}{\Gamma(b+1)} = 1-\alpha. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma(m+1, \lambda)$ — неполная гамма-функция, α—ошибка первого рода.

Обнаружение случайного импульсного сигнала

Имея в виду результаты экспериментов [1] и астрофизический анализ возможных источников гравитационного излучения [2], разумно выбрать модель ожидаемого сигнала в виде случайной последовательности независимых импульсов $S(t) = \sum\limits_{\nu} aF(t-t_\nu)$. Здесь t_ν — момент возникновения ν-го импульса, a — амплитуда импульса (изменения метрики, вызванного гравитационной волной). Поскольку форма $F(t)$ заранее точно неизвестна, рассмотрим два крайних случая.

1. Пусть $F(t)$ — резонансный цуг с достаточно пологими фронтами. Например, $F(t) = e^{t-\theta/\theta^2}\cos\omega_0 t$ ($\theta \gg \tau^*$ — эффективная длительность цуга). Для относительно редких импульсов (частота в единицу времени $N_0 \ll \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2\theta^{-1}$) и не слишком больших амплитуд $a\leqslant 3\sigma$ (практически интересны лишь малые a) характер случайных колебаний детектора изменится не сильно. В этом случае флуктуации детектора по-прежнему можно считать нормальным процессом (амплитуду-релеевской) с измененной дисперсией $\sigma_\eta^2 \simeq \sigma^2(1+k^2\lambda)$, $k=\frac{a}{\sigma}$, $\lambda = N_0\theta$.

При подсчете среднего числа совпадающих всплесков $\langle N_c\rangle_\eta$ в общем случае следует учесть корреляцию между огибающими r_1 и r_2, однако коэффициент корреляции $R(r_1, r_2)\approx\lambda^2k^4(\theta/\tau^*)^2$ оказывается величиной второго порядка малости по отношению к дисперсионной поправке. Число совпадений в этом приближении дается формулой (1).

Принимая за правило обнаружения сигнальных импульсов условие

$$\langle N_c\rangle_\eta - \sqrt{\langle N_c\rangle_\eta} \geqslant \langle N_c\rangle + \sqrt{\langle N_c\rangle} \tag{5}$$

(соответствующее достоверности $1-\alpha=0{,}66$ и вероятности пропуска сигнала $\beta=0{,}34$), получим, что на оптимальном уровне $c=a$ и при $a=3\sigma$, $\tau^*=20$ *сек*, $\tau_p=0{,}5$ *сек* для обнаружения необходима частота следования $\sim10^3$ импульсов в сутки. При этом эффект трудно отличить от случая воздействия некоррелированных «шумовых» импульсов с той же средней частотой. Таким образом, для пологих импульсов (с фронтом $\sim\tau^*$) только при больших амплитудах обнаружение по схеме совпадений может быть эффективным.

2. Ситуация сильно меняется для импульсов с резкими фронтами, что отвечает большинству астрофизических импульсных источников [2].

Пусть сигнальный импульс имеет вид короткого удара, т. е. $F(t)=\delta(t)$ (отклик детектора представляет собой релаксационный шлейф). Определим среднее число выбросов $\langle N_\eta\rangle_\eta$ огибающей r_η, пренебрегая эффектом наложения импульсов $(N_0\tau^*\ll1)$.

Для малого интервала $\Delta t\ll\tau^*$ справедливо

$$\langle N\rangle_\eta\,\Delta t = p_{\Delta t}(c), \text{ где } p_{\Delta t}(c) = P\,[r_\eta<c;\quad r_\eta(t+\Delta t)>c] —$$

— вероятность выброса за уровень c на рассматриваемом интервале. Эта величина может быть представлена в виде вероятности выброса в отсутствие сигнала на интервале Δt, вероятности выброса в предположении возникновения сигнала (фронта) на этом интервале и, наконец, вероятности выброса в предположении, что сигнал возник раньше — на предшествующем интервале длительностью $\theta-t^*$. Опуская подробные выкладки, запишем окончательное выражение

$$\langle N\rangle_\eta \approx N_r(1-N_0\theta) + N_0\left[1-e^{-c^2/2\sigma^2}-(1-e^{-c^2-a^2/2\sigma^2})\,U(c-a)\right] +$$
$$+ N_0\theta N_r\left\{\frac{\sigma}{a}I_0\left(\frac{ac}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\frac{\sqrt{n}}{2}\right\}. \tag{6}$$

Здесь $U(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant0\\ 0 & x<0\end{cases}$, I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента, $\Phi(x)$ — интеграл ошибок.

Аналогичные рассуждения при подсчете совпадений с учетом независимости тепловых шумов и тождественности сигнала дают для среднего числа совпадений на интервале T:

$$\langle N_c\rangle_\eta \simeq \frac{2T}{\tau_p}\left\{N_r^2(1-N_0\theta)\,\tau_p^2 + N_0\tau_p\left(1-e^{-c^2/2\sigma^2}-\left[1-e^{-c^2-a^2/2\sigma^2}\right]U(c-a)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+ N_2\theta N_r^2\tau_p^2\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\,\frac{\sigma}{a}\,I_0\left(\frac{ac}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{a}{c}\right)\right)^2\right\}. \tag{7}$$

На высоких уровнях $c\gg\sigma$ последним членом в (6) и (7) можно пренебречь, тогда для оптимального порога $c=a$ получим упрощенное соотношение (при $N_0\theta\ll1$)

$$\langle N_c \rangle_\eta \simeq 2N_r^2 T\tau_p + 2N_0 T (1 - e^{-c^2/2\sigma^2})^2. \quad (8)$$

Для сравнения с результатами опытов Вебера [1], где наблюдалось одно-два совпадения в день, подставим в (5) формулы (1) и (8). Для $\tau^* = 20$ *сек*, $\tau_p = 0{,}5$ *сек* обнаружимой будет последовательность сигнальных импульсов с $a = 2\sigma$. При частоте больше 3,5 импульсов в сутки и с

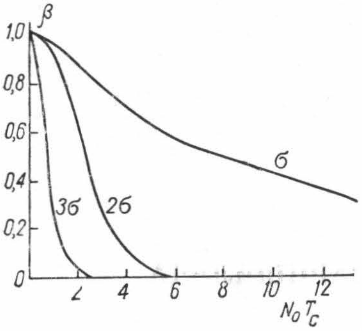

Рис. 1

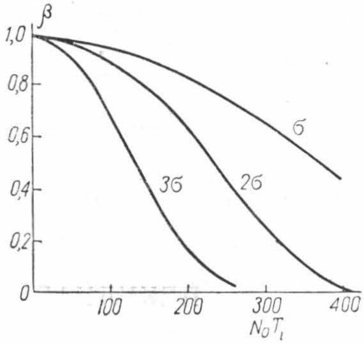

Рис. 2

$a = 3\sigma$ — при частоте больше 1,7 импульсов в сутки. Для некоррелированных шумовых импульсов с $a = 3\sigma$ значимой была бы частота $\gtrsim 350$ импульсов в сутки.

Таким образом, в опытах Вебера наблюдаемые совпадения должны отвечать импульсам с $a \gtrsim 3\sigma$.

На рис. 1 приведен график зависимости вероятности пропуска сигнала β от среднего числа сигнальных импульсов в сутки для оптимального уровня $c = a$, $a = 3\sigma$; 2σ; σ при $\alpha \approx 0{,}05$. Для сравнения на рис. 2 дана та же зависимость при воздействии импульсного некоррелированного шума. Отметим, что эффективность обнаружения еще более возрастает при учете только «крутых совпадений»; в этом случае минимально обнаружимое $a \ll \sigma$ при частоте N_0, как в опытах [1].

Авторы благодаря проф. В. Б. Брагинского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weber J. Phys. Rev. Lett., **22**, 1320, 1969; **25**, 180, 1970.
2. Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Руденко В. Н. «Письма ЖЭТФ», **10**, 434, 1969.
3. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., 1966.
4. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970.

Поступила в редакцию
8.8 1972 г.

Кафедра
физики колебаний