Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1973

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ПЕКУЛИАРНАЯ СФЕРА ШВАРЦШИЛЬДА

С помощью преимущественных слоений рассмотрена геометрия решения Шварцшильда. Дано определение пекулиарной поверхности. Вычислены инварианты кривизны для метрики Керра, отмечающие границы эргосферы. Доказаны некоторые теоремы.

Рассмотрим геометрию многообразия Шварцшильда V_S^4 с помощью его преимущественных слоений и инвариантов кривизны выше второго порядка. Сфера Шварцшильда S_p^2 оказывается особой поверхностью уравнений Эйнштейна $R_{ij}=0$ (i, $j=0$, 1, 2, 3; сигнатура $(+\,-\,-\,-)$).

Пусть дано центрально-симметричное (допускающее действующую на V^2 группу круговых вращений G_3) многообразие Эйнштейна V^4. Но интранзитивная группа движения G_3, действующая на V^2, не может быть полной [1], таковой является действующая на V^3 группа G_4: имеется коммутирующий с предыдущими оператор трансляций $x_4=\xi$ (вектор Киллинга) (это естественно: сферы транзитивности S^2 группы G_3 могут быть собраны в цилиндры). Отсюда, как и из теоремы Биркхора [2] (с уточнением [3]), следует, что V^4 есть многообразие Шварцшильда V_S^4. Нормальный делитель неразрешимой интранзитивной группы движения G_4 содержит оператор стационарной подгруппы. Само V_S^4 действием группы G_4 расслаивается в семейство поверхностей транзитивности $\{C_r\}$, причем каждая орбита группы C_r (с уравнением $r=\mathrm{const}$ или $I(r)=\mathrm{const}$ для некоторой гладкой функции I) есть цилиндр $S_r^2 \times E^1$, где S_r^2 — двумерная сфера, параметр r которой удобно считать ее радиусом кривизны (но не расстоянием до центра в V_S^4), а образующие E^1 (не геодезические) суть орбиты группы трансляций $G_1^t = G_4/G_3$ (ξ-линии).

Конгруэнции цилиндров C_r, сфер S_r^2, ξ-линий E^1 и двойственных им поверхностей, например ортогональных C_r градиентных кривых C_r^* ($*$ есть оператор Ходжа, будем C_r^* называть ∇I-линиями, только вдоль них изменяется кривизна V_S^4), являются преимущественными слоениями V_S^4, содержащими, вообще говоря, фокальные поверхности.

Поскольку ортогональные направления на S_r^2 равноправны, все S_r^2 имеют сигнатуру $(-\,-)$, оставляя для ортогональных ξ- и ∇I-линий возможные сочетания сигнатур (+) (—), (0), (0), (—) (+). Из соображений симметрии ясно, что бивекторы $\vec{\xi} \wedge \nabla I$ (интегральными для них являются, очевидно, радиальные геодезические поверхности π^2) и $(\vec{\xi} \wedge \nabla I)^*$, лежащие на S_r^2, определяют 2-направления экстремального значения кривизны, т. е. собственные листы тензора кривизны. По соображениям центральной симметрии конгруэнция ∇I-линий является геодезической (кривые экстремальной длины), нормальной (ортогональной геодезически параллельному семейству $\{C_r\}$) и бессдвиговой, имеющей только растяжение (градиентный ковектор ∇I имеет класс 1).

Жесткая конгруэнция ξ-линий не имеет, очевидно, растяжения и сдвига. В силу нормальности она конформно-геодезична, но в то же время не геодезична (не испытывает геодезического отклонения), ковектор $\vec{\xi}$ имеет класс 2: $\xi = \sigma\nabla\varphi$. Очевидно, конформное преобразование $ds^2 \to \sigma^2 ds^2$ меняет местами кривизну ξ- и ∇I-линий.

Пустим изотропные геодезические (фотоны) в противоположных радиальных направлениях в π^2. В силу упомянутых групповых соображений их конгруэнция не имеет сдвига (и вращения) и образована, следовательно (теорема Голдберга — Сакса [4]), двукратными векторами Дебеве $\vec{k}$, $\vec{l}$ (очевидно, $\vec{\xi} \wedge \nabla I = \lambda \vec{k} \wedge \vec{l}$), т. е. V_S^4 принадлежит к специальному алгебраическому типу D, по Петрову. Отсутствие вращения у геодезических π^2 (в том числе у k-, e- и ∇I-линий) означает вещественность стационарных кривизн $\overset{*}{R}_{ijkl} = 0$ ($R_{ijkl} = 0$, i, j, k, $l \neq$). Тем самым метрика имеет лишь один независимый действительный инвариант кривизны второго порядка (стационарную кривизну) I. В бивекторном пространстве имеем

$$(R_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl}) = diag(I, -I/2, -I/2, I, -I/2, -I/2)$$

в любом неизотропном орторепере с векторами на π^2 и S_r^2.

Из интегральных законов сохранения Элерса — Сакса для многообразий Эйнштейна типа D [5] следует замкнутость 2-формы $I^{2/3}(\vec{k} \wedge \vec{l})^*$, откуда легко получить $I = 2mr^{-3}$, где параметр m-семейства $\{V_S^4\}$ подобран так, чтобы в казиньютоновом приближении быть положительной массой источника гравитационного поля (или массой самого поля).

Вырожденный цилиндр C_0 (точки $r=0$, ∞ присоединяем к V_s^4, а точку $I=\infty$ — к $R^1 \ni I$) является сингулярным источником кривизны пустого (во всех прочих отношениях) пространства-времени. Поскольку кривизна V_s^4 с приближением к центру C_0 неограниченно возрастает (радиус кривизны ξ-линий ρ_ξ около C_0 пропорционален их расстоянию до C_0, $\rho_\xi \sim r^{3/2}$, а $\rho_s \sim r$). В пределах все продолжаемые вперед геодезические захватываются этим центром (из $m>0$ и геодезического отклонения следует притяжение, а не отталкивание центра, как в случае $m<0$), конус захвата геодезических (определяем его в данной точке как пучок всех 1-направлений, геодезические вдоль которых оканчиваются на сингулярности, берется одна пола конуса) вырождается в гиперплоскость.

Для $0<r<\varepsilon$ ($\varepsilon = 2m$) этот конус содержит световой внутри себя. Из непрерывности функции I следует, что при некотором удалении от центра ($r=2m$) конус захвата касается светового по главному световому направлению ($\vec{l}$). Далее оба конуса пересекаются по двухмерному световому конусу, который на пространственной бесконечности P_∞ вырождается во второе главное направление $(\vec{k})$. Соответствующая вектору Дебеве $\vec{k}$ геодезическая пересекает C_0 в несобственной точке P_0^+, присоединяемой к V_S^4.

Векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ совершенно равноправны, и, следовательно, каждый из них определяет свой изотропный эквиинвариантный цилиндр C_{2m}^-, C_{2m}^+. Рассматривая световые лучи в Π^2, убеждаемся, что эти цилиндры пересекаются в собственных точках (по сфере Шварцшильда S_p): $C_{2m}^+ \cap C_{2m}^- = S_p$, и оканчиваются или начинаются на двух сингулярностях C_0^+, C_0^-. Стратификация V_S^4 состоит из 11 частей: две R- и две T-области [3], дополняющих поверхности C_{2m}, C_0 (пусть $C_r = C_r^+ \cup C_r^-$), поверхности C_0^+, C_0^-, половинки цилиндров C_{2m}^+, C_{2m}^- (сигнатура $(0 - -)$ и их граница S_p (с концами C_0 имеет 15 частей)).

Цилиндры C_r в R-области имеют сигнатуру $(+ - -)$, а в T-области — $(- - -)$. Сфера S_p выделена среди прочих в C_{2m} тем, что в ней конус захвата имеет две световых образующих, соединяющих с помощью несобственных точек P_0^+, P_0^- (после отождествления попарно концов C_0; это временные бесконечности прошлого и будущего) обе сингулярности в одну.

Кривизна ξ-образующих C_r неконечна в окрестности C_{2m} (радиус кривизны пропорционален расстоянию до $S_p : \rho\xi \sim |2m - r|^{1/2}$), поскольку при конечном смещении вдоль ∇I до C_{2m} (где считаем $\nabla I = \lambda\vec{\xi}$, $\lambda \in R^1$, $\xi^2 = \nabla I^2 = 0$) они поворачиваются на бесконечный угол до гладко изменяющих направление геодезических C_r^*. Кривизна орбит G_1^t, разумеется, инвариантно характеризует геометрию V_S^4.

Сфера Шварцшильда S_p находится, очевидно, на одинаковом расстоянии от всех точек произвольного C_r-частности, на временном расстоянии πm от всех точек центров C_0^+, C_0^-, расположенных друг от друга, таким образом, на расстоянии $2\pi m$ по всей бесконечной пространственной длине. Следовательно, S_p является двухмерным седлом для семейства гиперповерхностей транзитивности $\{C_r\}$ и соответственно двухмерной фокальной поверхностью для набора гиперповерхностей E_1^* и расслаивающей их $C_r^* =$ конгруэнции ∇I-линий. Группа G_1^t на V_S^4 (со шварцшильдовой координатой t в качестве параметра) является группой гиперболических вращений V_S^4 вокруг седла S_p (сепаратрисы C_{2m} трехмерны, G_1^t одночленна), тогда как круговые вращения V_S^4 при действии трехчленной группы G_4/G_1^t происходят вокруг одномерного узла C_0. Решение Шварцшильда V_S^4 является, таким образом, двуцентрально симметричным, имеет сферическую и гиперболическую симметрии. Сфера Шварцшильда является, очевидно, особой поверхностью симметрии дифференциальных уравнений $R_{ij} = 0$. Рассмотрим некоторые особые поверхности с несколько более общей точки зрения. Введем для этого некоторые определения и сделаем некоторые утверждения.

Определение 1. Горизонтом пространства-времени называется изотропная экстремальная гиперповерхность.

Экстремальность гиперповерхности, определяемая через вариацию объема или среднюю кривизну, эквивалентна отсутствию на поверхности растяжения у нормальных геодезических (например мыльная пленка на проволочном контуре). Заметим, что экстремальные гиперповерхности могут быть взяты координатными для гармонической системы координат.

Определение 2. Множество нулей (комплексного) растяжения ρ семейства гравитационных лучей в пространстве-времени называется горизонтальным множеством.

Под гравитационными лучами здесь понимаются интегральные кривые для векторов Дебеве, а не изотропные геодезические без вращения. Лучи вдоль по меньшей мере двукратных векторов называем кратными. Если сумма кратностей лучей равна 4, будем говорить о вполне горизонтальном множестве.

Определение 3. Множество точек пространства-времени, в которых градиент (комплексного) скалярного инварианта I ортогонален вектору Дебеве $\vec{l}$ (т. е. $\nabla_l I=0$), будем называть *пекулиарным* множеством этого инварианта. Точки совпадения направлений векторов ∇I, $\vec{l}$ будем называть вырожденными пекулиарными.

Лемма. Любое семейство изотропных кривых без растяжения в многообразии Эйнштейна ($R_{ij}=0$) состоит из кратных гравитационных лучей, идущих вдоль ковариантно постоянного векторного поля $(\vec{l})$.

Утверждение леммы следует из уравнений Сакса [6] для оптических скаляров

$$l^i\nabla_i\rho = \rho + \sigma\bar{\sigma},\ \ l^i\nabla_i\sigma = \sigma(\rho+\bar{\rho}) + R_{ijkl}\, l^i m_j l^k m^l,$$

$$\rho = m^i\bar{m}^j\nabla_i l_l,\ \ \sigma = m^i m^j\nabla_i l_l,\ \ l_i l^i = m_i m^i = l_i m^i = m_i\bar{m}^i + 1 = 0,$$

$$\rho = 0,\quad l^i\nabla_i\rho = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow R_{ijkl}\, l^i m^j l^k m^l = 0,\quad \nabla_i l_j = 0.$$

Поскольку нормальная конгруэнция геодезична, ее бессдвиговость ($\sigma=0$) означает, что она образована кратными гравитационными лучами.

Следствие 1. В многообразии Эйнштейна горизонтальная изотропная гиперповерхность и горизонт совпадают друг с другом. Касательные к гравитационным лучам векторы Дебеве кратны и ковариантно постоянны.

Горизонтальность горизонта следует из отсутствия растяжения у его бихарактеристик, оказывающихся гравитационными лучами.

Следствие 2. Многообразие Эйнштейна, всюду принадлежащее к алгебраически общему типу, не содержит горизонтов.

Это следует из кратности лучей горизонта.

Следствие 3. Через любую точку неплоского многообразия Эйнштейна проходит самое большее два горизонта. При этом область пересечения двух различных горизонтов есть вполне горизонтальная поверхность и принадлежит к типу D по классификации Петрова.

Теорема. Пекулиарная поверхность стационарной кривизны (I) многообразия Эйнштейна типа D по Петрову горизонтальна ($\rho_l=0$). Наоборот, горизонтальное множество в этом случае пекулиарно для I.

Это утверждение следует из множества Бьянки, имеющего для данного случая вид

$$2l^i\nabla_i I + 3I\nabla_i l^i = 0,\quad I \neq 0.$$

Приложения сделанных утверждений к многообразиям Шварцшильда и его обобщениям очевидны (например, вполне горизонтальная сфера Шварцшильда есть вырожденная пекулиарная поверхность).

Отождествление концов C_0^+, C_0^- есть, очевидно, простейший вариант склейки в V_S^4. Отождествляя концы (временных) геодезических на C_0, проходящих через $S_p(V_S^4$ тогда топологически эквивалентна $\mu\times S^2$, μ — лист Мёбиуса, неориентируемость относим на счет сингулярности), получим замкнутые временные ∇I-линии: система отсчета (т. е. временное 1-слоение) Шварцшильда (она синхронна) реализуется системой пробных частиц, повторяющих свою историю с периодом $2\pi m$, не выходя за пределы C_{2m} (вне C_{2m} система отсчета жесткая). Все геодезические продолжаем через C_0 с сохранением направления. Стратификация V_S^4 содержит тогда 12 частей. Возможны и другие отождествления (например, $V_S^4\sim RP^2\times S^2$, RP^2 — проективная плоскость).

Беря линии вдоль $\vec{\xi}$, ∇I, $\vec{k}$, $\vec{l}$ в качестве координатных, получаем координаты кривизн (t, r, причем $\xi^i=\delta_0^i$) и Крускала (u, v — запаздывающее и опережающее световое время), для которых имеем [7, 8] ($d\Omega^2$ — метрика S_1^2):

$$ds^2=(2m/r-1)^{-1}\,dr^2-(2m/r-1)\,dt^2-r^2d\Omega^2,$$
$$0<r<2m,\quad 2m<r<\infty$$
$$ds^2=32m^3r^{-1}\exp(-r/2m)\,dudv-r^2d\Omega^2,\quad uv<1,\quad S_p:u=v=0,$$
$$u/v=-\exp(t/2m),\quad uv=(1-r/2m)\exp(r/2m).$$

Отметим возможность расширения $V_S^4(\equiv V_S^+)$ до $V_S=V_S^+\cup V_S^-$ присоединением области V_S^- : $-\infty<r<0$. Очевидно, $V_S^-(m)=V_S^+(-m)$.

Свободно падающая частица в системе отсчета Шварцшильда отметит $t=+\infty$ в момент пересечения C_{2m} и одновременно — $r=2m$ по второй части временной шкалы, и момент времени r уменьшается до нуля к моменту коллапса всего пространства постоянной кривизны C_r (сечения $t=\text{const}$ пересекаются по S_p, а $r=\text{const}$ — в P_0). Далее частица выходит в область отрицательных значений r (допустим, что это возможно).

Беря характерные временной $2\pi m$ и пространственный $2m$ параметры центра и учитывая, что $g_{00}g_{11}=-1$ (для преимущественной голономной системы тетрад — она заменяет систему координат, к которой понятие привилегированности неприменимо), мы можем (условно) приписать источнику 2-площадь $4\pi m^2$. Из вида метрики заключаем, что r-линии имеют световое касание на пекулиарной и сингулярной поверхностях C_{2m} и C_0 (будем их обе считать изотропными и геодезическими). Очевидно, вырожденный цилиндр C_0 является границей, разделяющей и соединяющей V_S^+ и V_S^-.

Винтовые геодезические $r=\text{const}\geqslant 2m$ являются асимптотическими линиями [9, 10] C_r, вырождаясь в образующие для C_∞, C_{2m} (и C_0).

Приведем некоторые инварианты кривизны для V_S^4 (до 6-го порядка):

$$C\equiv R_{ijkl}R^{ijkl}=48m^2r^{-6}=12I^2,$$
$$\sigma\equiv\nabla_mR_{ijkl}\nabla^mR^{ijkl}=-432\,m^2r^{-9}(r-2m)=12\Delta_1I,$$
$$\Delta_1I\equiv(\nabla I)^2=-36\,m^2r^{-9}(r-2m),$$
$$\Delta_2I\equiv\nabla^2I=-12\,mr^{-6}(r-3m),$$
$$\mu\equiv\Delta_1^2I=-(72m^2)^2r^{-21}(4r-9m)^2(r-2m),$$
$$\Delta_1\Delta_2I=-(60m)^2r^{-15}(r-3{,}6\,m)^2(r-2m),$$

$$\Delta_2 \Delta_1 I = 144 m^2 r^{-12} (14 r^2 - 68 mr + 81 m^2),$$

$$\Delta_2^2 I = 60 m r^{-9} (4 r^2 - 28 mr + 43{,}2 m^2).$$

Величина $r = 9m/4$ отвечает критическому размеру несжимаемого жидкого шара, давление в центре которого становится бесконечным.

Для метрики Керра, получаемой из V_S^4 комплексным поворотом вокруг плоскости $\theta = \pi/2$ (возникает вращение источника или кручение многообразия), имеется один комплексный инвариант кривизны $I = 2m (r - ia \cos \theta)^{-3}$, для которого получаем:

$$|\nabla I|^2 = -36 m^2 (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-5} (r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta),$$

$$l^i \nabla_i I = 3 \sqrt{2}\, m (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-5} (r + ia \cos \theta)^4 (r^2 - 2mr + a^2).$$

Центральная сингулярность $r = \theta - \pi/2 = 0$ становится кольцевой, вырожденными пекулиарными являются только полярные лучи (две пары). Формирующий не участвующий в комплексном повороте горизонта параметр m составляет часть «массы вращения» и после нормировки (m становится полной массой) его размер уменьшается (по сравнению с V_s^4). Получаемый усреднением по направлениям инвариант $(\nabla I)^2$ откликается на комплексный поворот. Физически это означает, что вращение источника увлекает свободные частицы, которые вследствие этого приобретают световую скорость относительно жесткой системы отсчета (на соответствующей поверхности $(\nabla I)^2 = 0$ реализуется фотонами) еще до достижения горизонта, на котором они со скоростью света приближаются к центру или удаляются от него, имея временные мировые линии. Растяжения гравитационных лучей

$$\rho_1 = -2^{-1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-2} (r + ia \cos \theta) (r^2 - 2mr + a^2),$$

$$\rho_2 = 2^{-1/2} (r + ia \cos \theta)^{-1}$$

определяют положение горизонтов, являющихся для единственного инварианта кривизны пекулиарными поверхностями, обобщающими на случай углового момента ($a < m$) пекулиарные поверхности Шварцшильда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., 1966.
2. Birkchoff G. D. Relativity and Modern Physics. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1923.
3. Зельдович З. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., 1967.
4. Goldberg J. N., Sachs R. K. Acta Phys. Polon., **22** (Suppl.) 13, 1962.
5. Jordan P., Ehlers J., Sachs R. K. Abh. Akad. Wiss. Mainz (Math.-hat., kl.), No. 1, 1961.
6. Sachs R. K. Proc. Roy. Soc. (London), **A 264**, 309, 1961.
7. Schwarzschild K., Sitzber. Akad. Wiss. Berlin, 1916.
8. Kruskal M. D. Phys. Rev., **119**, 1743, 1960.
9. Kronecker L., Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, **692**, 1869.
10. Voss A. Math. Ann., **16**, 129, 1880.

Поступила в редакцию
15.3 1971 г.

Кафедра
астрофизики