УДК 517.2

Т. А. МАРТЫНОВА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Численная реализация огромного ряда физических задач связана с решением краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для многослойных областей.

К таким задачам приводит расчет ядерных реакторов [1], расчет многих геомагнитных задач [2], связанных с физикой гиротропных слоистых сред, например, расчет волноводов со слоистым гиротропным заполнением [3], и многие другие.

В работе [4] был предложен метод решения таких задач с нормализацией и ортогонализацией [5], особенно удобный при решении краевых задач на больших участках, т. е. при сильном росте прогоняемых решений, а также при собственных значениях матрицы системы, сильно различающихся по величине вещественной части.

В настоящей статье этот метод обобщается на случай многослойных областей.

Пусть участок оси $0z\,[0, l]$ при помощи точек $0=z_0<z_1<\ldots<z_{Q-1}<z_Q$ разбит на Q частей (слоев). Рассмотрим на $[0, l]$ следующую краевую задачу:

$$\vec{Y}'_q(z)=\Omega_q\vec{Y}_q(z),\ q=1, 2, \ldots, Q, \tag{1}$$

$$F\vec{Y}_1(0)=\vec{f}, \tag{2}$$

$$\vec{Y}_q(z_q)=S_q\vec{Y}_{q+1}(z_q),\ q=1, 2, \ldots, Q-1, \tag{3}$$

$$H\vec{Y}_Q(l)=\vec{h}. \tag{4}$$

Здесь $\vec{Y}_q(z)$, $\vec{f}$, $\vec{h}$ — вектора размерности n, $m(n-m)$, причем один из двух последних (например, $\vec{h}$) может быть тождественно равен нулю; $\Omega_q(z)$, S_q — квадратные матрицы размерности $n\times n$; F, H — прямоугольные матрицы размерности $m\times n$, $(n-m)\times n$, q — номер слоя, n, m — целые положительные числа, причем $n>m$.

В дальнейшем, где это необходимо, будем предполагать невырожденность соответствующих матриц.

Рассмотрим практически важный случай, когда из (1)—(4) следует определить $\vec{Y}_1(0)$ и $\vec{Y}_Q(l)$.

Найдем полную систему линейно-независимых векторов $\{\vec{V}^i, i=1, 2, \ldots, m\}$, удовлетворяющих краевому условию на правом конце:

$$H\vec{V}^i=h,\ i=1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Эту систему будем искать в виде

$$U_j^i(l)=\begin{cases} x_j^i,\ j=1, 2, \ldots, (n-m). \\ \delta_{(n-m+i),j},\ j=(n-m+1), \ldots, n, \end{cases} \tag{6}$$

причем неизвестные компоненты x_j^i $(j=1, 2, \ldots, (n-m)$ i-го вектора $\vec{V}^i$ определятся из решения алгебраической системы (5).

По условию задачи $[0, l]$ разбит на Q частей при помощи точек $\{0=z_0<z_1<\ldots$ $\ldots<z_Q=l\}=S\{z\}$. Пусть в некоторой точке z_q $(q=1, 2, \ldots, Q-1)$ существует полная линейно-независимая система векторов $\{\vec{U}^i_{q+1}(z_q),\ i=1, 2, \ldots m\}$. И пусть A — оператор, ставящий ей в соответствие полную систему линейно-независимых векторов $\{U_q^{l_i}(z_q), i=1, 2, \ldots, m\}$ по формуле

$$\vec{U}^i_q(z_q)=S_q\vec{U}^i_{q+1}(z_q),\ i=1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Действие этого оператора можно записать так:

$$A\{\vec{U}^i_{q+1}(z_q),\ i=1,2,\ldots,m\}=\{\vec{U}^i_q(z_q),\ i=1,2,\ldots,m\}. \tag{8}$$

В процессе решения задачи иногда необходимо проведение ортогонализации и нормализации прогоняемых решений не в узлах сетки $S\{z\}$, а гораздо чаще, либо, наоборот, реже. Поэтому целесообразно ввести сетку ортогонализации и нормализации $S\{\xi\}$, независимую от сетки $S\{z\}$. Структура этой сетки выбирается в соответствии с особенностями конкретной задачи.

Итак, разобьем $[0, l]$ на P частей при помощи точек

$$\{0=\xi_P<\xi_{p-1}<\ldots<\xi_1<\xi_0=l\}=S\{\xi\}.$$

Пусть в некоторой точке ξ_p $(p=1, 2, \ldots, P)$ существует полная линейно-независимая система векторов $\{\vec{U}^{i(p-1)}(\xi_p),\ i=1, 2, \ldots, m\}$. И пусть B — оператор ортогонализации и нормализации, осуществляющий треугольное преобразование и ставящий ей в соответствии по известным формулам [1] полную систему линейно-независимых векторов $\{\vec{U}^{i(p)}(\xi_p),\ i=1, 2, \ldots, m\}$ и матрицу преобразования $\omega^{(p)}$.

Действие этого оператора можно записать так:

$$B\{\vec{U}^{i(p-1)}(\xi_p),\ i=1,2,\ldots,m\}=\{\{\vec{U}^{i(p)}(\xi_p),\ i=1,2,\ldots,m\},\ \omega^{(p)}\}. \tag{9}$$

Итак, у нас имеется две совершенно независимые сетки $S\{z\}$ и $S\{\xi\}$, концы которых совпадают. Пусть $S\{\eta\}=\{0=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_{M-1}<\eta_M=l\}$ — сетка, получающаяся наложением сеток $S\{z\}$ и $S\{\xi\}$.

Рассмотрим $[\eta_{M-1}, \eta_M=l]$. Решив на нем m задач Коши

$$\begin{aligned}\vec{Y}^{i(0)\prime}_Q(z)&=\Omega_Q(z)\,Y^{i(0)}_Q(z),\\ \vec{Y}^{i(0)}_Q(l)&=\vec{V}^i,\quad i=1,2,\ldots,m,\end{aligned} \tag{10}$$

получим $\{\vec{Y}^{i(0)}_Q(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}$. Далее:

Если точка $\eta_{M-1}\in S\{z\}\Lambda\eta_{M-1}\notin S\{\xi\}$, выполним преобразование

$$A\{\vec{Y}^{i(0)}_Q(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}=\{\vec{Y}^{i(0)}_{Q-1}(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}.$$

Если точка $\eta_{M-1}\notin S\{z\}\Lambda\eta_{M-1}\in S\{\xi\}$, выполним преобразование

$$B\{\vec{Y}^{i(0)}_Q(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}=\{\{\vec{Y}^{i(1)}_Q(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\},\ \omega^{(1)}\}.$$

Если точка $\eta_{M-1}\in S\{z\}\Lambda\eta_{M-1}\in S\{\xi\}$, выполним последовательно преобразования

$$BA\{\vec{Y}^{i(0)}_Q(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}=$$

$$B\{\vec{Y}^{i(0)}_{Q-1}(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\}=\{\{\vec{Y}^{i(1)}_{Q-1}(\eta_{M-1}),\ i=1,2,\ldots,m\},\ \omega^{(1)}\}.$$

И так далее. Наконец, прийдя в точку $z=0$ и выполнив в ней преобразование (9), получим $\{\{\vec{Y}^{i(P)}_1(0),\ i=1,2,\ldots,m\},\ \omega^{(P)}\}$.

Теперь необходимо найти истинные значения $\vec{Y}_1(0)$ и $\vec{Y}_Q(l)$.

Введем матрицу $Y^{(p)}_q(z)$ $(q=1,2,\ldots,Q;\ p=0,1,2,\ldots,P)$ размерности $(n\times m$ и вектор $\beta^{(p)}$ $(p=0,1,2,\ldots,P)$ размерности m.

Тогда $Y^{(0)}_Q(l)=V$. Истинное решение на левом конце будем искать в виде

$$\vec{Y}_1(0)=Y^{(P)}_1(0)\,\vec{\beta}^{(P)}, \tag{11}$$

где вектор $\vec{\beta}^{(P)}$ найдется из условия (2), а именно:

$$FY^{(P)}_1(0)\,\vec{\beta}^{(P)}=\vec{f} \tag{12}$$

Абстрагируемся от сетки $S\{z\}$ и рассмотрим лишь сетку $S\{\xi\}$.

Совершенно очевидно, что истинное решение задачи $Y_q(z)$ на любом участке $[\xi_p, \xi_{p-1}]$ ($p=1, 2, ..., P$) может быть представлено в виде:

$$\vec{Y}_q(z) = Y_q^{(p-1)}(z)\,\vec{\beta}^{(p-1)}. \tag{13}$$

Если внутри этого участка имеются точки из сетки $S\{z\}$, то совершенно ясно, что в них будет выполняться условие (3). Следовательно, задача состоит в отыскании векторов $\vec{\beta}^{(p)}$ ($p=0, 1, 2, ..., P-1$). Это делается следующим образом.

Рассмотрим произвольную точку ξ_p ($p=1, 2, ..., P$). В ней справедливы следующие соотношения.

Если точка $\xi_p \in S\{\xi\} \Lambda \xi_p \notin S\{z\}$, то, в силу (13), имеем (считая, что $\xi_p \in [z_{q-1}, z_q]$):

$$\vec{Y}_q(\xi_p) = Y_q^{(p-1)}(\xi_p)\,\vec{\beta}^{(p-1)}, \tag{14}$$

$$\vec{Y}_q(\xi_p) = Y_q^{(p)}(\xi_p)\,\vec{\beta}^{(p)}, \tag{15}$$

$$\vec{Y}_q^{(p-1)}(\xi_p) = Y_q^{(p)}(\xi_p)\,\omega^{(p)}. \tag{16}$$

Если точка $\xi_p \in S\{\xi\} \Lambda \xi_p \in S\{z\}$, то в силу (13), (3), (7), имеем (считая, что $\xi_p = z_q$)

$$\vec{Y}_{q+1}(\xi_q) = Y_{q+1}^{(p-1)}(\xi_p)\,\vec{\beta}^{(p-1)}, \tag{17}$$

$$\vec{Y}_q(\xi_p) = Y_q^{(p)}(\xi_p)\,\vec{\beta}^{(p)}, \tag{18}$$

$$\vec{Y}_q(\xi_p) = S_q \vec{Y}_{q+1}(\xi_p), \tag{19}$$

$$S_q Y_{q-1}^{(p-1)}(\xi_p) = Y_q^{(p)}(\xi_p)\,\omega^{(p)}. \tag{20}$$

Из (14) — (16), в первом случае, и (17) — (20), во втором, следует:

$$\vec{\beta}^{(p-1)} = (\omega^{(p)})^{-1}\vec{\beta}^{(p)}. \tag{21}$$

Решение же на правом конце $\vec{Y}_Q(l)$ найдем по формуле:

$$\vec{Y}_Q(l) = V\vec{\beta}^{(0)}. \tag{22}$$

Следует особо отметить, что порядок применения операторов A и B не инвариантен относительно алгоритма восстановления точного решения, что видно из соотношений (17) — (20), и должен быть именно таким, как это описано в данной статье.

В Вычислительном центре МГУ проведен эксперимент по решению задачи о распространении электромагнитных волн в волноводе с многослойным ферритовым заполнением рассмотренным методом, который оказывается легко и просто реализуемым и эффективным в работе.

В заключение автор благодарит проф. А. Г. Свешникова за внимание и общее руководство работой и экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., 1958.
2. Моденов В. П. «Геомагнетизм и аэрономия», № 6, 1969.
3. Мартынова Т. А. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. 20, изд. ВЦ МГУ, 1973.
4. Годунов С. В. «Успехи математических наук», **16**, 3, 99, 1966.
5. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., 1968.

Поступила в редакцию
30.11 1972 г.

Кафедра
математики