Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

539.2

ХЕЛЛАЛЬ ЭЛЬ ХАСЕН

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

С помощью регуляризации «предельного представления» строится бесконечная система уравнений, которая не содержит никаких бесконечных констант перенормировок, решение которого приводит к регуляризованным значениям для многочастичных функций Грина.

С появлением уравнений Швингера [1] стала возможной информация о многочастичных функциях Грина, которые не были бы связаны с теорией возмущения. Однако, как выяснилось, решения уравнений Швингера для функции Грина содержат расходимости того же типа, что и матрица рассеяния $S$, и потому возникли серьезные затруднения. В связи с этим в [2 и 3], например, была проведена программа перенормировок для этих уравнений. В этих работах особенность полученных уравнений состоит в том, что они являются уравнениями для перенормируемых величин, в которых фигурируют бесконечные постоянные перенормировки. В сущности основные трудности останутся, так как уравнения для функций Грина, свободных от расходимости, снова включают бесконечные постоянные.

Далее в [4] была предпринята попытка избавиться от расходимостей с помощью R-операций Боголюбова. Однако такой метод, как и программа перенормировок, приводит к существенному затруднению, связанному также с появлением бесконечных постоянных в уравнениях. Трудности эти говорят о том, что регуляризация $R$-операции, применяемая к построению уравнений Швингера, должна быть заменена другим методом регуляризации.

В работе [5] показывается, что в случае скалярного самодействующего поля, подобных трудностей не возникает при использовании регуляризации «предельного представления» [6]. Дело в том, что регуляризация «предельного представления» в своей формулировке явно теории возмущения не содержит, и поэтому удается построить уравнение для определения регуляризованных многочастичных функций Грина, не содержащее бесконечные коэффициенты. Этот метод регуляризации недавно нами был сформулирован для квантовой электродинамики [7]. Сущность предложенного способа регуляризации состоит в следующем: спинорные и фотонные пропагаторы полей рассматриваются как слабый предел непрерывных функций:

$$D^c(x) = \lim_{\nu\to 0} D^c(x;\nu) = \lim_{\nu\to 0}\int dk e^{ikx}\sum_i \frac{a_i(\nu)}{m^2\mathfrak{M}_i^2(\nu) - k^2 - i\varepsilon},$$

$$s^c(x) = \lim_{\mu\to 0} s^c(x;\mu) = \lim_{\mu\to 0}\int dk e^{ikx}\sum_i b_i(\mu)\frac{m-\hat{k}}{m^2\mathfrak{N}_i^2(\mu) - k^2 - i\varepsilon},$$

где константы $a_i(\nu)$, $\mathfrak{M}_i(\nu)$ и $b_i(\mu)$, $\mathfrak{N}_i(\mu)$ удовлетворяют условиям Паули — Вилларса [8].

Такое представление дает возможность сформулировать правило перемножения пропагаторов, обеспечивающее конечность элементов $S$-матрицы. Такие матричные элементы можно определить как интеграл от произведения обобщенной функции на достаточно гладкую основную функцию и выразить следующим образом:

$$R_n(g) = \operatorname*{Plim}_{(\nu)\to 0}\operatorname*{Plim}_{(\mu)\to 0}\int dx_1\ldots dx_n g(x_1\ldots x_n)\times$$
$$\times\prod_{i<j} D^c(x_i - x_j|\nu_{\alpha(i,j)})\prod_{r,s}\gamma^{\beta(r,s)}S^c(x_r - x_s|\mu_{\beta(r,s)}), \tag{1}$$

где $\operatorname*{Plim}_{(\nu)\to 0} = \lim_{\nu_1\to 0}\ldots\lim_{\nu_M\to 0}\frac{1}{M!}P(\nu_1\ldots\nu_M)$, а $P(\nu_1\ldots\nu_M)$ — сумма по всем перестановкам параметров. Как показано ранее [7], если на параметры $a_i(\nu)$, $\mathfrak{M}_i(\nu)$, $b_i(\mu)$, $\mathfrak{N}_i(\mu)$ наложим условия

$$\lim_{\nu\to 0}\sum_i a_i(\nu)\mathfrak{M}_i^{\alpha}(\nu)\,\mathrm{Ln}^{\beta}\mathfrak{M}_i(\nu) = A_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, 4,\quad \beta \leqslant n + 2 - \mathrm{Lext};$$

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_i b_i(\mu)\mathfrak{N}_i^{\alpha}(\mu)\,\mathrm{Ln}^{\beta}\mathfrak{N}_i^2(\mu) = B_{\alpha,\beta} < +\infty,$$

$$\alpha = \beta = 0, 1,$$

то все матричные элементы $S$-матрицы до $n$-го порядка теории возмущения оказываются конечными и совпадают с матричными элементами S-матрицы, регуляризованными $R$-операцией Боголюбова.

На основе этой работы, следуя Д. А. Славнову, в настоящей статье мы попытаемся в случае электродинамики построить уравнения, которые не содержали бы никаких бесконечных констант перенормировки, решения которых приводили бы к регуляризованным значениям для многочастичных функций Грина, и, наконец, в которых теория возмущения никак явно не фигурирует.

1. Рассматривается спинорная электродинамика, описываемая лагранжианом взаимодействия

$$\mathscr{L}(\bar{\eta}, \eta, J) = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^{\mu}A_{\mu},$$

в который, следуя Швингеру, введены вспомогательные классические источники, благодаря чему можно будет произвести операцию функционального дифференцирования. Здесь $J^{\mu}$ — классический внешний ток, $\bar{\eta}$ и $\eta$ — классические спинорные поля, антикоммутирующие как друг с другом, так и с полями $\bar{\psi}$ и $\psi$. При этом многочастичная функция Грина с точностью до множителя $S_0^{-1}$ определяется следующим образом:

$$k_{2r,m}=k\left(\begin{matrix}y_1\dots y_r\\ \bar{y}_1\dots\bar{y}_r\end{matrix}\,\Big|\,z_1\dots z_m\right)=$$

$$=i^{-(2r+m)}\left\langle\frac{\delta^{2r+m}}{\delta\bar{\eta}(y_1)\dots\delta\bar{\eta}(y_r)\,\delta\eta(\bar{y}_1)\dots\delta\eta(\bar{y}_r)\,\delta J(z_1)\dots\delta J(z_m)}S\right\rangle_0\Bigg|_{\substack{\bar{\eta}=\eta=0\\ J=0}}. \qquad (2)$$

(В дальнейшем для кратности многократное варьирование по $\bar{\eta}$, $\eta$ и $\bar{J}$ будем записывать символически $\delta^{2r+m}$.)

Для установления связи между различными многочастичными функциями Грина удобно использовать в качестве вспомогательного аппарата теорию возмущения. Разлагая в соотношении (2) $S$-матрицу в ряд, получим

$$k_{2r,m}=\sum_{n\geqslant 0}^{\infty}k_{2r,m}^{(n)},$$

причем

$$k_{2r,m}^{(n)}=i^{(2r+m)}\langle\delta^{2r+m}S^{(n)}\rangle_0\Big|_{\substack{\bar{\eta}=\eta=0.\\ J=0}}$$

Так как мы хотим с самого начала манипулировать регуляризованными функциями Грина, то для раскрытия $T$-произведения по нормальным произведениям воспользуемся определением произведения пропагаторов, предложенным в (1), т. е. $S^{(n)}$ выражаем в виде

$$S^{(n)}=\underset{(\nu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\underset{(\mu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n T_{reg}\prod_{i=1}^{n}\mathscr{L}(\bar{\eta},\eta,J)_i. \qquad (3)$$

Здесь $T_{reg}$ раскрывается по теореме Вика, только в качестве спинорных и фотонных пропагаторов следует брать соответственно функции $S^c(x;\mu)$ и $D^c(x,\nu)$.

Далее удобно выразить правую часть уравнения (3) в явном виде; в результате получим

$$S^{(n)}=\underset{(\nu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\underset{(\mu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n\times$$

$$\times T_{reg}\sum_{k=0}^{n}C_k^n\left\{\sum_{l=0}^{k}C_l^k\prod_{i=1}^{l}(\bar{\eta}\psi)_i\prod_{i=l+1}^{k}(\bar{\psi}\eta)_i\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=k}^{n}C_{t-k}^{n-k}\prod_{i=k+1}^{t}J_i\prod_{i=t+1}^{n}e(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)_i\right\}\prod_{i=k+1}^{n}A_{\mu_i}. \qquad (4)$$

Выполняя операцию многократного варьирования по внешним источникам $\bar{\eta}$, $\eta$ и $J$ в (4), а затем полагая $\bar{\eta}=\eta=0$, $J=0$, находим

$$\delta^{2r+m}S^{(n)}\Big|_{\substack{\bar{\eta}=\eta=0\\ J=0}}=\underset{(\nu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\underset{(\mu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n C_{2r}^n C_r^{2r} C_m^{n-2r}\times$$

$$\times T_{reg}\Big\{P(x_1\dots x_r)\prod_{i=1}^{r}\delta(y_i-x_i)\psi(x_i)\,P(x_{r+1}\dots x_{2r})\prod_{i=1}^{r}\delta(\bar{y}_i-x_{i+r})\bar{\psi}(x_{i+r})\times$$

$$\times P(x_{2r+1}\dots x_{2r+m})\prod_{i=1}^{m}\delta(z_i-x_{2r+1})A_{\mu_{2r+i}}(x_{2r+i})\prod_{i=2r+m+1}^{n}e\bar{\psi}(x_i)\gamma^{\mu_i}\psi(x_i)A_{\mu_i}(x_i)\Big\}.$$

(5)

Если учесть, что

$$T\left\{\frac{1}{k!}P(x_1\dots x_k)\prod_{i=1}^{k}\delta(y_i-x_i)\psi(x_i)\right\}=T\left\{\prod_{i=1}^{k}\delta(y_i-x_i)\psi(x_i)\right\},$$

то с помощью соотношения (5) многочастичную функцию Грина $n$-го порядка можно представить в виде

$$k_{2r,m}^{(n)}=\underset{(\nu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\,\underset{(\mu)\to 0}{\mathrm{Plim}}\frac{(ie)^{n-(2r+m)}}{[n-(2r+m)]!}\int dx_1\dots dx_n\prod_{i=1}^{r}\delta(y_i-x_i)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r}\delta(\bar{y}_i-x_{i+r})\prod_{i=1}^{m}\delta(z_i-x_{n-m+i})\times$$

$$\times\left\langle T_{reg}\prod_{i=1}^{r}\psi(x_i)\prod_{i=1}^{r}\bar{\psi}(x_{i+r})\prod_{i=2r+1}^{n-m}\bar{\psi}(x_i)\gamma^{\mu_i}\psi(x_i)\right\rangle_0\left\langle T_{reg}\prod_{i=2r+1}^{n}A_{\mu_i}(x_i)\right\rangle_0.\quad(6)$$

Нам удобно выразить вакуумное ожижание от хронологического произведения операторов через определитель. Таким образом, следуя работе Э. Р. Кайаниело [9], многочастичную функцию Грина можно представить в виде

$$k_{2r,m}^{(n)}=\lim_{\nu_1\to 0}\dots\lim_{\nu_M\to 0}\lim_{\mu_1\to 0}\dots\lim_{\mu_N\to 0}\frac{1}{M!}P(\nu_1\dots\nu_M)\frac{1}{N!}P(\mu_1\dots\mu_N)\times$$

$$\times\frac{(ie)^{(n-(2r+m)}}{[n-(2r+m)]!}\int dx_1\dots dx_n\prod_{i=1}^{k}\delta(y_i-x_i)\prod_{i=1}^{r}\delta(\bar{y}_i-x_{i+r})\prod_{i=1}^{m}\delta(z_i-x_{n-m+i})\times$$

$$\times\sum_{\alpha}\gamma^{\alpha_{2r+1}}\dots\gamma^{\alpha_{n-m}}\begin{pmatrix}x_1 & \dots x_r & x_{2r+1}\dots x_{n-m}\\ x_{r+1} & \dots x_{2r} & x_{2r+1}\dots x_{n-m}\end{pmatrix}_{\mu}[x_{2r+1}\dots x_n]_{\nu},\quad(7)$$

где

$$\begin{pmatrix}x_1 & \dots x_r & x_{2r+1}\dots x_{n-m}\\ x_{r+1} & \dots x_{2r} & x_{2r+1}\dots x_{n-m}\end{pmatrix}_{\mu}=$$

$$=\begin{vmatrix}(x_1x_{r+1}:\mu_{1,r+1}) & \dots(x_1x_{n-m}:\mu_{1,n-m})\\ \vdots & \vdots\\ (x_rx_{r+1}:\mu_{r,r+1}) & \dots(x_rx_{n-m}:\mu_{r,n-m})\\ (x_{2r+1}x_{r+1}:\mu_{2r+1,r+1}) & \dots(x_{2r+1}x_{n-m}:\mu_{2r+1,n-m})\\ \vdots & \vdots\\ (x_{n-m}x_{r+1}:\mu_{n-m,r+1}) & \dots(x_{n-m}x_{n-m}:\mu_{n-m,n-m})\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{\varepsilon}P(j_{r+1}\dots j_{n-m})(x_1x_{j_{r+1}}:\mu_{1,j_{r+1}})\dots(x_{n-m}x_{j_{n-m}}:\mu_{n-m,j_{n-m}}).$$

Здесь $P(j_{r+1}\dots j_{n-m})$ — суммирование по всем $(n-m-r)!$ перестановкам $(j_{r+1}\dots j_{n-m})$ из $(r+1, r+2, \dots, n-m)$, $\varepsilon$ — четность перестановок,

$$[x_{2r+1}\dots x_n]_{\nu}=\sum_{i=2r+2}^{n}[x_{2r+1}x_i:\nu_{2r+1,i}][x_{2r+2}\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n]_{\nu},\quad(8)$$

причем

$$(x_i x_j : \mu_{i,j}) = \frac{1}{i} S^c (x_i - x_j;\ \mu_{\beta(i,j)}),$$

$$[x_i x_j : \nu_{i,j}] = i D^c (x_i - x_j;\ \nu_{\alpha(i,j)}).$$

(В последующих формулах параметры $\mu$ и $\nu$ опускаются для облегчения записи и будут восстановлены в окончательном результате.)

Здесь следует отметить, что фактически формулы (6) и (7) не эквивалентны. Действительно, правая часть соотношения (7) содержит выражения типа $S^c(0;\ \mu) \times \int dx_1 \ldots dx_j \ldots$, соответствующие диаграмме, где частица, выйдя из одной точки, вернется к ней невзаимодействующей. Поскольку мы ограничимся рассмотрением лишь наблюдаемых величин, в соотношении (7) необходимо будет каким-либо образом исключить такие выражения.

В работах [9] и [10] авторы просто предлагают отождествить $S^c(0)$ с нулем, однако такое предложение, хотя оно является эффективным, никак нельзя обосновать. Особенностью нашего метода регуляризации является то, что с его помощью такую трудность легко преодолеть, наложив следующее условие на параметры $B_{\alpha,\beta}$:

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_i b_i(\mu)\, \mathfrak{M}_i^2(\mu)\, \mathrm{Ln}\, \mathfrak{M}_i(\mu) = B_{2,1} = 0,$$

причем

$$S^c(0;\ \mu) = 2i\pi^2 m^2 B_{2,1}.$$

Это вполне согласно с используемой схемой регуляризации. Далее легко показать, что в формуле (7)

$$\lim_{\mu_1 \to 0} \ldots \lim_{\mu_N \to 0} \frac{1}{N!} P(\mu_1 \ldots \mu_N) P(j_{r+1} \ldots j_{n-m}) \{\ldots\} =$$

$$= \lim_{\mu_1 \to 0} \ldots \lim_{\mu_N \to 0} P(j_{r+1} \ldots j_{n-m}) \{\ldots\},$$

$$\lim_{\nu_1 \to 0} \ldots \lim_{\nu_M \to 0} \frac{1}{M!} P(\nu_1 \ldots \nu_M) P(j_{2r+1} \ldots j_n) \{\ldots\} =$$

$$= \lim_{\nu_1 \to 0} \ldots \lim_{\nu_M \to 0} P(j_{2r+1} \ldots j_n) \{\ldots\}. \tag{9}$$

Следовательно, с учетом (9) регуляризованная многочастотная функция Грина принимает окончательный вид

$$k_{2r,m} = \lim_{\nu_1 \to 0} \ldots \lim_{\nu_M \to 0} \lim_{\mu_1 \to 0} \ldots \lim_{\mu_N \to 0} \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\sum_{\alpha} \gamma^{\alpha_1} \ldots \gamma^{\alpha_n} \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_r & x_1 \ldots x_\eta \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r & x_1 \ldots x_\eta \end{pmatrix}_{\mu} [z_1 \ldots z_m\ x_1 \ldots x_\eta]_\nu. \tag{10}$$

2. Установим теперь основные уравнения, связывающие различные регуляризованные многочастичные функции Грина. Ясно, что такую связь следует искать при разложении определителя. Для получения искомых соотношений проще всего воспользоваться тем, что в соотношении (10) определители можно разложить двумя способами: или сначала разложить спинорный определитель, а затем фотонный, или наоборот. Сначала рассмотрим первый вариант. Пользуясь определением (8) для разложения сначала спинорного определителя (по элементам

первой строки), а затем фотонного, получаем первый тип искомого уравнения для многочастичной функции Грина

$$k_{2r,m}\left(\begin{matrix} y_1 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_m\right) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} S^c(y_1 - \bar{y}_i) \times$$

$$\times k_{2r-2,m}\left(\begin{matrix} y_2 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_{i-1}\, \bar{y}_{i+1} \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_m\right) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_{\alpha} S^c(y_1 - x_1; \mu) \gamma^{\alpha_1} D^c(x_1 - x_2; \nu) \gamma^{\alpha_2} \times$$

$$\times k_{2r+2,m}\left(\begin{matrix} x_1 y_2 \dots y_r x_2 \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r x_2 \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_m\right) +$$

$$+ ie \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{m} \int dx \sum_{\alpha} s^c(y_1 - x; \mu) \gamma^{\alpha} D^c(x - z_i; \nu) \times$$

$$\times k_{2r,m-1}\left(\begin{matrix} x y_2 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_{i-1} z_{i+1} \dots z_m\right). \tag{11}$$

Для второго случая проводится аналогичное рассуждение, причем в этом варианте разлагается прежде фотонный определитель, лишь потом спинорный. В результате получим второй тип уравнения для $k_{2r,m}$:

$$k_{2r,m}\left(\begin{matrix} y_1 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_m\right) =$$

$$= \sum_{i=2}^{m} iD^c(z_1 - z_i)\, k_{2r,m-2}\left(\begin{matrix} y_1 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_2 \dots z_{i-1} z_{i+1} \dots z_m\right) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_{\alpha} D^c(z_1 - x_1; \nu) \gamma^{\alpha_1} S^c(x_1 - x_2; \mu) \gamma^{\alpha_2} \times$$

$$\times k_{2r+2,m}\left(\begin{matrix} x_2 y_1 \dots y_r \\ x_1 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_2 \dots z_m x_2\right) +$$

$$- ie \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{r} \int dx \sum_{\alpha} D^c(z_1 - x_j; \nu) \gamma^{\alpha} S^c(x - \bar{y}_i; \mu) \times$$

$$\times k_{2r,m-1}\left(\begin{matrix} y_1 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_{i-1}\, \bar{y}_{i+1} \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_2 \dots z_m\right). \tag{12}$$

Переходим к собственно многочастичным функциям Грина

$$K_{2r,m} = (k_{0,0})^{-1} k_{2r,m}, \quad \text{причем} \quad k_{0,0} = S_0.$$

Поделив на $S_0$ формулы (11) и (12), получаем следующую систему уравнений:

$$K_{2r,m}\left(\begin{matrix} y_1 \dots y_r \\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_r \end{matrix} \Big| z_1 \dots z_m\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} s^c (y_1 - \bar{y}_i) K_{2r-2,\, m} \left( \begin{matrix} y_2 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{i-1} \bar{y}_{i+1} \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_1 \ldots z_m \right) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_{\alpha} S^c (y_1 - x_1; \mu) \gamma^{\alpha_1} D^c (x_1 - x_2; \nu) \gamma^{\alpha_2} \times$$

$$\times K_{2r+2,m} \left( \begin{matrix} x_1 y_2 \ldots y_r x_2 \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r x_2 \end{matrix} | z_1 \ldots z_m \right) +$$

$$+ - ie \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{m} \int dx \sum_{\alpha} S^c (y_1 - x; \mu) \gamma^{\alpha} D^c (x - z_i; \nu) \times$$

$$\times K_{2r, m-1} \left( \begin{matrix} x y_2 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_m \right);$$

$$K_{2r,m} \left( \begin{matrix} y_1 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_1 \ldots z_m \right) = \sum_{i=2}^{m} i D^c (z_1 - z_i) \times$$

$$\times K_{2r,\, m-2} \left( \begin{matrix} y_1 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_m \right) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_{\alpha} D^c (z_1 - x_1; \nu) \gamma^{\alpha_1} S^c (x_1 - x_2; \mu) \gamma^{\alpha_2} \times$$

$$\times K_{2r+2,m} \left( \begin{matrix} x_2 y_1 \ldots y_r \\ x_1 \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_2 \ldots z_m \right) +$$

$$+ ie \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx \sum_{\alpha} D^c (z_1 - x; \nu) \gamma^{\alpha} S^c (x - \bar{y}_i; \mu) \times$$

$$\times K_{2r,m-1} \left( \begin{matrix} y_1 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{i-1} \bar{y}_{i+1} \ldots \bar{y}_r \end{matrix} | z_1 \ldots z_m \right). \qquad (13)$$

Представляет большой интерес получить подобные уравнения для определения регуляризованных многофермионных и многофотонных функций Грина $G$ и $D$. Такую систему уравнений можно сразу получить, исходя из системы уравнений (1.3), если заметим, что функции $G$ и $D$ являются как раз частным случаем многочастичной функции Грина $K$. Таким образом, из соотношения (13) получим следующие уравнения для $G$ и $D$:

$$G_{2r} \left( \begin{matrix} y_1 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r \end{matrix} \right) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} S^c (y_1 - \bar{y}_i) G_{2r-2} \left( \begin{matrix} y_2 \ldots y_r \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{i-1} \bar{y}_{i+1} \ldots \bar{y}_r \end{matrix} \right) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu \to 0} \lim_{\mu \to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_{\alpha} S^c (y_1 - x_1; \mu) \gamma^{\alpha_1} D^c (x_1 - x_2; \nu) \times$$

$$\times G_{2r+2} \left( \begin{matrix} x_1 y_2 \ldots y_r x_2 \\ \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r x_2 \end{matrix} \right), \qquad (14)$$

$$D_m (z_1 \ldots z_m) = \sum_{i=2}^{m} i D^c (z_1 - z_i) D_{m-2} (z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_m) +$$

$$+ e^2 \lim_{\nu\to 0} \lim_{\mu\to 0} \int dx_1 dx_2 \sum_\alpha D^c(z_1 - x_1; \nu)\, \gamma^{\alpha_1} S^c(x_1 - x_2; \mu)\, \gamma^{\alpha_2} \times$$

$$\times K_{2,m}\left(\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \end{matrix} \Big| x_2 z_2 \ldots z_m\right). \qquad (15)$$

Вместе с (13) уравнения (14) и (15) образуют замкнутую систему уравнений, из которой можно извлечь информации о неизвестных величинах $G$, $D$ и $K$. В том, что в уравнениях (14)—(15) мы имеем дело с перенормированными величинами, легко убедиться, решая их методом итерации.

Здесь уместно сделать следующее замечание по поводу пределов в уравнениях (13)—(15). В случае, когда аргументы многочастичной функции Грина $y_i$ и $y_i$ друг с другом не совпадают, в формулах (13)—(15) можно совершить предельный переход под знаком интеграла по спинорному параметру $\mu$, что легко показать. Аналогично в случае, когда аргументы многочастичной функции Грина $z_i$ отличаются друг от друга, в формулах (13)—(15) можно взять предел по фотонному параметру $\nu$.

Итак, с помощью предлагаемого метода регуляризации была получена бесконечная система уравнений (13)—(15), из которой можно получить любую регуляризованную многочастичную функцию Грина. Такая система уравнений является эквивалентом уравнений Швингера в вариационных производных. Однако она существенно отличается от уравнений Швингера тем, что хотя и является системой уравнений для перенормированных величин, никакие бесконечные коэффициенты в ней не фигурируют.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Д. А. Славнову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger I. Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 1951.
2. Иоффе Б. Л. ДАН СССР, **98**, 361, 1954.
3. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, **26**, 751, 1954.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1957.
5. Славнов Д. А. ЖЭТФ, **47**, 224, 1964.
6. Славнов Д. А. ЖЭТФ, **42**, 1543, 1962.
7. Хеллаль Эль Хасен. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., т. 12, 1971.
8. Pauli W., Willars F. Rev. Mod Phys., **21**, 434, 1949.
9. Caianiello E. R. Nuovo Cim., **13**, 637, 1959.
10. Visconti A. Theorie quantique des champs. Tome II. Gauthier. Villars. Paris, 1965.

Поступила в редакцию
16.5 1972 г.

Кафедра
квантовой статистики