ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

УДК 530.12:531.51

Ю. С. ВЛАДИМИРОВ, В. И. АНТОНОВ

5-МЕРНАЯ СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Рассматривается 5-мерное искривленное пространство. 5-я координата выделяется методом, аналогичным методу хронометрических инвариантов Зельманова. 5-мерные уравнения Эйнштейна и геодезических записываются в калибровочно-инвариантном виде. Для случая равенства нулю калибровочно-инвариантных производных от геометрических величин и отсутствия аналога электромагнитного поля найдено статическое сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна и проанализированы уравнения движения пробных тел.

Введение

В последнее время усиленно обсуждаются различные модификации скалярно-тензорной теории гравитации [1]. Основной предпосылкой этой теории, пожалуй, являются гипотеза Дирака об изменении во времени гравитационной константы $\varkappa$ и других физических постоянных. Плотность функции Лагранжа обычного гравитационного, дополнительного скалярного и других полей выбирается в виде

$$L=\sqrt{-g}\left(\varphi R-\frac{\omega\varphi_{,\mu}\,\varphi^{,\mu}}{\varphi}+L_m\right), \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна, φ — скалярное поле, ω — безразмерная константа, L_m — лагранжиан других полей. Иногда добавляются и иные члены, содержащие φ и их производные.

Нам представляется более естественным подойти к введению скалярного поля и фиксации его связи с обычной гравитацией через 5-мерное искривленное пространство.

Первые работы по 5-мерной теории принадлежат Т. Калуца [2], затем с дополнительными предположениями она развита в [3] и [4].

В этих работах, во-первых, классическая (не квантовая) пятимерная теория обычно распадается на хорошо известные 4-мерные уравнения Эйнштейна с правой частью в виде тензора энергии-импульса электромагнитного поля (обязанного компонентам $G_{4\mu}$) и уравнения Максвелла, соответствующие четырем дополнительным уравнениям Эйнштейна.

Во-вторых, принимается наличие дополнительного постулата, фактически исключающего зависимость геометрических характеристик от пятой координаты (условие цилиндричности по пятой координате).

В-третьих, возникает лишний компонент метрического тензора G_{44}, который обычно считают равным единице.

В данной работе этого не делается. Предполагается, что именно этот компонент может выступать в роли φ-поля.

Нам представляется интересным изучение выделения 5-й координаты методом, аналогичным методу хронометрических инвариантов (х. и.) А. Л. Зельманова в четырехмерном случае [5—6]. Согласно этому методу из множества всевозможных преобразований координат $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, где $\mu = 0, 1, 2, 3$, выбирается подмножество преобразований с явно выделенной координатой x^0:

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{2}$$

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3), \tag{3}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Физическим смыслом могут обладать лишь величины, инвариантные относительно преобразований (2) и ковариантные при преобразованиях (3). А. Л. Зельманов предложил их называть хронометрически-инвариантными (х. и.) величинами. Из первых производных по координатам от компонентов метрического тензора можно построить набор (х. и.) величин. Все ковариантные уравнения, в том числе уравнения Эйнштейна, геодезических и др. можно записать в (х. и.) виде, т. е. только через (х. и.) выражения.

§ 1. Калибровочно-инвариантная 5-мерная теория

Аналогично методу (х. и.) из всевозможных преобразований координат 5-мерного пространства $x^{A'} = x^{A'}(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ (где $A = 0, 1, 2, 3, 4$) выделим подмножество преобразований

$$x^{4'} = x^{4'}(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4); \tag{4}$$

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{5}$$

Назовем калибровочно-инвариантными (кл. и.) величины, инвариантные относительно преобразований (4) и ковариантные при преобразованиях (5). Физически значимыми будем считать только (кл. и.) величины. Таковыми будут выражения

$$\underbrace{B^{\mu\nu\sigma\ldots}_{444\ldots}}_{n} \cdot \frac{1}{(G_{44})^{n/2}}.$$

Из компонентов метрического тензора G_{AB} пятимерного риманова пространства можно построить следующие (кл. и.) выражения:

$$G^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{G_{4\mu}\, G_{4\nu}}{G_{44}}, \quad G^{\nu}_{\mu} = \tilde{g}^{\nu}_{\mu}.$$

Квадрат интервала 5-мерного пространства представляется в виде

$$dI^2 = G_{AB}\, dx^A\, dx^B = (d\Lambda)^2 + ds^2,$$

где $d\Lambda = \dfrac{G_{4B}\, dx^B}{\sqrt{G_{44}}}$ — (кл. и.) интервал пятой координаты, $\tilde{g}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \dfrac{G_{4\mu}\, G_{4\nu}}{G_{44}}$ — (кл. и.) метрика неголономного четырехмерного сечения, ортогонального линиям пятой координаты. Введем обозначения $G_{44}=B^2$, $G_{4\mu}=B\widetilde{A}_\mu$, тогда имеем

$$G_{44}=\frac{1}{B^2}(1+\widetilde{A}_\mu\widetilde{A}^\mu),\ G^{4\mu}=-\frac{1}{B}\widetilde{A}^\mu,\ G_{\mu\nu}=\widetilde{g}_{\mu\nu}+\widetilde{A}_\mu\widetilde{A}_\nu.$$

Операторам дифференцирования по координатам сопоставим следующие (кл. и.) операторы

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\to\partial_4^+\equiv\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x^4};$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\to\partial_\mu^+\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{\widetilde{A}_\mu}{B}\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Коммутируя (кл. и.) операторы дифференцирования, получаем (кл. и.) геометрические величины

$$[\partial_4^+,\partial_\mu^+]_-=\Phi_\mu\partial_4^+, \tag{6}$$

где

$$\Phi_\mu=\frac{1}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\widetilde{A}_\mu'}{\partial x^4}\right)\text{— (кл. и.) величина}$$

и

$$[\partial_\mu^+,\partial_\nu^+]_-=2\widetilde{F}_{\mu\nu}\partial_4^+, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\widetilde{A}_\nu}{\partial x^\mu}+\Phi_\mu\widetilde{A}_\nu-\Phi_\nu\widetilde{A}_\mu\right)\text{— (кл. и.) величина.}$$

Можно еще образовать следующие (кл. и.) выражения:

$$Д_{\alpha\beta}=\frac{1}{2B}\frac{\partial\widetilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^4}\quad\text{и}\quad Д^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2B}\frac{\partial\widetilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial x^4}$$

аналоги тензора скоростей деформаций в методе (х. и.) величин, и коэффициенты связности, построенные из $\widetilde{g}_{\mu\nu}$

$$\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\gamma\sigma}(\partial_\beta^+\widetilde{g}_{\sigma\alpha}+\partial_\alpha^+\widetilde{g}_{\sigma\beta}-\partial_\sigma^+\widetilde{g}_{\alpha\beta}).$$

Введем ковариантную (кл. и.) производную $\overset{+}{\nabla}_\mu$, отличающуюся от обычной ковариантной производной заменой символов Кристоффеля коэффициентами $\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$.

Запишем через (кл. и.) величины уравнение геодезической в пятимерном пространстве

$$\frac{d^2x^A}{dl^2}=-P^A_{BC}\frac{dx^B}{dl}\frac{dx^C}{dl},$$

где

$$P^A_{BC}=\frac{1}{2}G^{AD}\left(\frac{\partial G_{DB}}{\partial x^C}+\frac{\partial G_{DC}}{\partial x^B}-\frac{\partial G_{BC}}{\partial x^D}\right).$$

Для этого введем (кл. и.) обобщенные скорости

$$u^\mu=\frac{dx^\mu}{ds}\quad\text{и}\quad\frac{d\Lambda}{ds}=B\frac{dx^4}{ds}+\widetilde{A}_\mu u^\mu.$$

Тогда имеем

$$\frac{dx^\mu}{dl}=\frac{u^\mu}{\sqrt{1+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2}};$$

$$\frac{dx^4}{dl}=\frac{1}{B\sqrt{1+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2}}\left(\frac{d\Lambda}{ds}-\widetilde{A}_\mu u^\mu\right),$$

$$\frac{d^2x^\mu}{dl^2}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right]}\frac{dx^\mu}{ds}-\frac{u^\mu}{\left[1+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right]^2}\frac{d\Lambda}{ds}\frac{d^2\Lambda}{ds^2}.$$

Записывая P^A_{BC} через (кл. и.) величины с соответствующими коэффициентами, находим (кл. и.) уравнения геодезической

$$\frac{du^\mu}{ds}=-\widetilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta-\frac{d\Lambda}{ds}u^\nu(2\widetilde{F}^\mu_{\cdot\nu}+2Д^\mu_\nu-Д_{\nu\alpha}u^\mu u^\alpha)+$$

$$+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2(\Phi^\mu-\Phi_\nu u^\nu u^\mu),\tag{8}$$

$$\frac{d^2\Lambda}{ds^2}=\left[1+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right]\left(Д_{\mu\nu}u^\mu u^\nu-\frac{d\Lambda}{ds}\Phi_\mu u^\mu\right).\tag{9}$$

Скалярная кривизна и (кл. и.) компоненты тензора кривизны имеют вид

$${}^5R=H_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\alpha\beta}-Д^2-Д_{\mu\alpha}Д^{\mu\alpha}-\widetilde{F}_{\mu\alpha}\widetilde{F}^{\mu\alpha}-2(\partial_4^+Д+\Phi_\alpha\Phi^\alpha+\nabla_\alpha^+\Phi^\alpha);\tag{10}$$

$${}^5R^{\mu\nu}=H^{\mu\ \nu\rho}_{\cdot\rho\cdot\cdot}-\Phi^\mu\Phi^\nu-ДД^{\mu\nu}-Д\widetilde{F}^{\mu\nu}+2Д^{\mu\rho}Д^\nu_\rho-$$

$$-2\widetilde{F}^{\mu\rho}\widetilde{F}^{\nu}_{\cdot\rho}-\widetilde{g}^{\mu\alpha}\widetilde{g}^{\beta\nu}\left[\frac{1}{2}(\nabla_\alpha^+\Phi_\beta+\nabla_\beta^+\Phi_\alpha)+\partial_4^+Д_{\alpha\beta}\right];\tag{11}$$

$$\frac{{}^5R^\mu_4}{\sqrt{G_{44}}}=\nabla_\nu^+(Д^{\nu\mu}+\widetilde{F}^{\nu\mu}-Д\widetilde{g}^{\mu\nu})+2\Phi_\alpha\widetilde{F}^{\alpha\mu};\tag{12}$$

$$\frac{{}^5R_{44}}{G_{44}}=-\nabla_\alpha^+\Phi^\alpha-\partial_4^+Д-\Phi_\alpha\Phi^\alpha-Д_{\alpha\beta}Д^{\alpha\beta}+\widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta},\tag{13}$$

где

$$H_{\mu\nu\rho\cdot}^{\ \ \ \ \sigma}=\partial_\nu^+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\rho}-\partial_\rho^+\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu}+\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho}\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\nu}-\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\rho\alpha}.$$

Несмотря на присутствие в (11) антисимметричного члена $Д\widetilde{F}_{\mu\nu}$, все выражение симметрично из-за несимметрии первого члена справа.

Используя (10)—(13), запишем уравнения Эйнштейна с правой частью в пятимерном пространстве

$$\begin{aligned}&{}^5R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\widetilde{g}^{\mu\nu}\,{}^5R=-\varkappa Q^{\mu\nu}\to H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}H=\\&=\left(2\widetilde{F}_{\mu\alpha}\widetilde{F}^\alpha_{\nu\cdot}-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}\right)+\Phi_\mu\Phi_\nu+(\nabla_\mu^+\Phi_\nu+\nabla_\nu^+\Phi_\mu)-\\&-\widetilde{g}_{\mu\nu}(\Phi_\alpha\Phi^\alpha+\nabla_\alpha^+\Phi^\alpha)+Д\widetilde{F}_{\mu\nu}+ДД_{\mu\nu}-2Д_{\mu\alpha}Д^\alpha_\nu+\partial_4^+Д_{\mu\nu}-\\&-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\mu\nu}(Д^2+Д_{\alpha\beta}Д^{\alpha\beta}+2\partial_4^+Д)-\varkappa Q^{\alpha\beta}\widetilde{g}_{\alpha\mu}\widetilde{g}_{\beta\nu};\end{aligned}\tag{14}$$

$$\frac{{}^5R_4^{\mu}}{\sqrt{G_{44}}} = \overset{+}{\nabla}_{\nu} (Д^{\mu\nu} + \widetilde{F}^{\nu\mu} - Д\widetilde{g}^{\mu\nu}) + 2\Phi_{\alpha}\widetilde{F}^{\alpha\mu} = -\varkappa \frac{Q_4^{\mu}}{\sqrt{G_{44}}}; \qquad (15)$$

$$\frac{1}{G_{44}}\left({}^5R_{44} - \frac{1}{2} G_{44}\, {}^5R\right) = -\frac{1}{2} H + \frac{3}{2} \widetilde{F}_{\alpha\beta} \widetilde{F}^{\alpha\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} (Д^2 - Д_{\alpha\beta} Д^{\alpha\beta}) = -\varkappa \frac{Q_{44}}{G_{44}}, \qquad (16)$$

где Q_{AB} — 5-мерный тензор энергии-импульса материи.

§ 2. Сферически-симметричное решение в 5-мерной теории гравитации

Наложим на геометрические характеристики 5-мерного пространства следующие условия.

Калибровочно-инвариантные производные от геометрических величин по пятой координате равны нулю. В этом случае все $\overset{+}{\partial}_{\mu}$ совпадают с обычными производными и

$$\Phi_{\mu} = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}, \quad Д_{\alpha\beta} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad H_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}.$$

Данное условие соответствует условию цилиндричности, накладывавшемуся различными авторами.

(Кл. и.) антисимметричный тензор $\widetilde{F}_{\alpha\beta}$ равен нулю.

Тогда уравнения Эйнштейна в пустом пространстве принимают вид

$${}^5R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \Phi_{\mu} \Phi_{\nu} - \frac{1}{2} (\overset{+}{\nabla}_{\mu} \Phi_{\nu} + \overset{+}{\nabla}_{\nu} \Phi_{\mu}) = 0,$$

$$(17)$$

$$\frac{{}^5R_{44}}{G_{44}} = -\nabla_{\alpha} \Phi^{\alpha} - \Phi_{\alpha} \Phi^{\alpha} = 0,$$

где индексы поднимаются и опускаются с помощью $g_{\mu\nu}$.

Найдем решение этой системы уравнений для статического центрально-симметричного случая, когда

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

где $\nu = \nu(r)$ и $\lambda = \lambda(r)$. Отличной от нуля будет только один компонент Φ_{μ}

$$\Phi_1 = \frac{1}{B} \frac{dB}{dr} \equiv y.$$

После подстановки значений компонентов метрического тензора и символов Кристоффеля уравнения Эйнштейна получаем в виде

$$R_{00} = -e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} y = 0, \qquad (18)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda'\nu' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{\lambda'}{r} - y^2 - y' + \frac{\lambda'}{2} y = 0, \qquad (19)$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda')\right) + 1 - re^{-\lambda} y = 0, \qquad (20)$$

$$\frac{{}^5R_{44}}{G_{44}} = e^{-\lambda}\left(y' - \frac{\lambda'}{2}y\right) + e^{-\lambda}y^2 + \frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}y + \frac{2e^{-\lambda}}{r}y = 0, \tag{21}$$

где штрих означает дифференцирование по r.

Умножая на соответствующие величины уравнения (18) и (21) и складывая их, находим

$$\frac{\nu''}{\nu'} = \frac{y'}{y} = -2\left(\frac{\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{4} + \frac{y}{2} + \frac{1}{r}\right), \tag{22}$$

откуда следует

$$y = \alpha\nu', \tag{23}$$

где α — некоторая постоянная. Уравнение (19) с учетом (18) и (21) перепишем в виде

$$ry\nu' + (\lambda' + \nu' + 2y) = 0. \tag{24}$$

Исключая из (18) и (24) λ' и учитывая (23), находим уравнение для ν

$$\nu'' + \nu'^2(1 + 2\alpha) + \frac{2\nu'}{r} + \frac{\alpha}{2}r\nu'^3 = 0. \tag{25}$$

После замены переменной $r=e^t$ и подстановки $\dot{\nu}=x$ это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\dot{x} + x + (1 + 2\alpha)\,x^2 + \frac{\alpha}{2}x^3 = 0,$$

где точка означает дифференцирование по t. После взятия интеграла, получим

$$\frac{\alpha x + 1 + 2\alpha - \sqrt{1 + 2\alpha + 4\alpha^2}}{\alpha x + 1 + 2\alpha + \sqrt{1 + 2\alpha + 4\alpha^2}}\;\frac{\left[1 + (1 + 2\alpha)\,x + \frac{\alpha}{2}x^2\right]^{\frac{1}{2\delta}}}{x^{\frac{1}{\delta}}}\,C^{\frac{1}{\delta}} = r^{\frac{1}{\delta}}, \tag{26}$$

где

$$\delta = \frac{1 + 2\alpha}{2\sqrt{1 + 2\alpha + 4\alpha^2}}.$$

Предположим, что $|\alpha| \ll 1$. Не находя явную зависимость $x=\dot{\nu}$ от r, решим полученное уравнение приближенно. Для этого представим константу $C^{\frac{1}{\delta}}$ в виде

$$C^{\frac{1}{\delta}} = \frac{2}{\alpha}(C_1 + \alpha C_2)$$

и разложим (26) в ряд по α. В результате находим

$$\frac{(1+x)^2}{x^2} - \frac{\alpha(1+x)}{x^2}\left(3 + (1+x)\ln\frac{(1+x)}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{r^2}{C_1}(1 - 2\alpha\ln r + \alpha C_2') + O(\alpha^2).$$

Нулевой порядок по α соответствует отсутствию поля Φ_μ. В этом случае уравнение

$$\frac{(1+x_0)^2}{x_0^2}=\frac{r^2}{C_1}$$

дает решение Шварцшильда

$$e^{\nu_0}=\left(1+\frac{\sqrt{C_1}}{r}\right).$$

Выбираем константу

$$\sqrt{C_1}=-\frac{2mk}{c^2}\equiv -b.$$

Ищем решение в первом приближении по α в виде

$$x=x_0+\alpha z, \text{ где } x_0=r\nu'=\frac{b}{r-b}.$$

В итоге для z находим

$$z=r\nu_1'=-\frac{3b}{2(r-b)}-\frac{rb}{2(r-b)^2}\ln\frac{r-b}{r}+\frac{rC_3}{(r-b)^2},$$

что соответствует компоненту g_{00} метрического тензора

$$g_{00}=e^{\nu}=\left(1-\frac{b}{r}\right)^{1-\alpha\left(1-\frac{b}{2(r-b)}\right)}e^{\alpha\frac{a}{r-b}}, \tag{27а}$$

где $a=\mathrm{const}$. Разлагая это выражение в ряд по b/r, можно записать

$$e^{\nu}\simeq 1-\frac{b}{r}+\frac{\alpha}{r}(b+a)+O\left(\alpha^2, \frac{b^2}{r^2}\right). \tag{27б}$$

Из уравнений (18) и (20) находим

$$-g_{11}=e^{\lambda}=-\frac{(r\nu')'}{\nu'}.$$

Подставляя сюда (27б), находим в первом приближении по α

$$e^{\lambda}=\frac{1}{1-bu}+\frac{\alpha u}{(1-bu)^2}\left[(b-a)-\frac{b}{2}\ln(1-bu)\right]+O(\alpha^2), \tag{28а}$$

или, раскладывая по b/r:

$$e^{\lambda}\simeq 1+\frac{b}{r}+\frac{\alpha}{r}(b-a). \tag{28б}$$

Из (23) получаем выражение для $\Phi_1=y$:

$$\Phi_1=\frac{\alpha bu^2}{1-bu}-\frac{(b+a)\alpha^2u^2}{(1-bu)^2}+\frac{3\alpha^2b^2u^3}{2(1-bu)^2}-\frac{\alpha^2bu^2}{2(1-bu)^2}\ln(1-bu). \tag{29а}$$

В низшем приближении по α и b/r имеем $\left(u=\frac{1}{r}\right)$

$$\Phi_1\simeq \alpha u^2(b-\alpha a-\alpha b). \tag{29б}$$

§ 3. Уравнения геодезических в сферически-симметричной метрике 5-мерной теории гравитации

По условиям предыдущего параграфа уравнения (8) и (9) принимают вид

$$\frac{du^{\mu}}{dS} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} + \left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2 (\Phi^{\mu} - \Phi_{\nu} u^{\nu} u^{\mu}), \tag{30}$$

$$\frac{d^2\Lambda}{ds^2} = -\left[1 + \left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right] \frac{d\Lambda}{ds} \Phi_{\nu} u^{\nu}. \tag{31}$$

Решим эти уравнения для частицы, движущейся в гравитационном поле центрального источника.

Пятое уравнение геодезической ($A=4$). Умножим (31) на $2\,\frac{d\Lambda}{ds}$, тогда

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right] = -2\left[1 + \left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\right]\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2 \Phi_{\nu} u^{\nu}.$$

Вводя обозначение $\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2 = W$ и учитывая (23), находим

$$\frac{dW}{W(1+W)} = -2\alpha\nu' dr \to \ln\frac{1+W}{W} = 2\alpha\nu + \ln C_1,$$

откуда получаем

$$W = \frac{W_0}{e^{2\alpha\nu} + W_0 (e^{2\alpha\nu} - 1)}, \tag{32а}$$

где $W_0 = \frac{1}{C_1 - 1}$.

В случае, когда (кл. и.) антисимметрический тензор $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ отличен от нуля, его естественно интерпретировать с точностью до множителя как тензор электромагнитного поля $\widetilde{F}_{\mu\nu} = C\sqrt{\varkappa}\,F_{\mu\nu}$. Тогда, как это видно из уравнения (8), величину $\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)$ можно отождествить с комбинацией характеристик пробной частицы $C'\frac{e}{m\sqrt{\varkappa}}$. Таким образом, в общем случае $\frac{e}{m\sqrt{\varkappa}}$ зависит от координат частицы (в данном случае от радиуса). Когда поле Φ_{ν} отсутствует ($\alpha = 0$), пробная частица движется по обычной геодезической независимо от своего заряда, зависимость $\frac{e}{m\sqrt{\varkappa}}$ от r пропадает и $W = W_0$.

В первом приближении по α имеем

$$W \cong W_0\left(1 + \frac{2\alpha b}{r}(1 + W_0)\right) + O\left(\alpha^2, \frac{b^2}{r^2}\right). \tag{32б}$$

Уравнение для $\mu = 2$ имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + 2\,\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2 \Phi_1 \frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Выбирая в начальный момент $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{d\theta}{ds} = 0$, видим, что частица будет находиться в экваториальной плоскости в течении всего своего движения.

Уравнение для $\mu=3$ находим в виде

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2\Gamma_{13}^3\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\Phi_1\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0.$$

Умножая уравнение на $d\varphi/dr$ и вводя обозначение $d\varphi/ds=q(r)$, находим

$$q'+\frac{2}{r}q+W\alpha\nu'q=0.$$

Это уравнение приводит к модифицированному закону сохранения площадей

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=\frac{C_2}{\sqrt{1+W_0(1-e^{-2\alpha\nu})}}. \qquad (33а)$$

Для малых значений α получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=C_2\left(1+\frac{\alpha W_0 b}{r}\right)+O\left(\alpha^2,\ \frac{b^2}{r^2}\right), \qquad (33б)$$

т. е. изменение закона в первом порядке по α не должно сказываться на нейтральных частицах.

Уравнение для $\mu=0$ имеет вид

$$\frac{d^2x^0}{ds^2}+2\Gamma_{10}^0\frac{dx^0}{ds}\frac{dr}{ds}+\left(\frac{d\Lambda}{ds}\right)^2\Phi_1\frac{dr}{ds}\frac{dx^0}{ds}=0.$$

Умножая это уравнение на ds/dr и вводя обозначение $dx^0/ds=p(r)$, приходим к уравнению

$$p'+\nu'p+W\alpha\nu'p=0,$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{dx^0}{ds}=\frac{C_3e^{-\nu}}{\sqrt{1+W_0(1-e^{-2\alpha\nu})}}. \qquad (34а)$$

Для малых α, используя (27б), запишем

$$\frac{dx^0}{ds}\simeq C_3\left[(1+bu)-\alpha u(b+a-W_0)\right]+O\left(\alpha^2,\ \frac{b^2}{r^2}\right). \qquad (34б)$$

Уравнение для радиального компонента получим из выражения для квадрата интервала. Используя (33а) и (34а), находим

$$1=\frac{C_3^2e^{-\nu}}{[1+W_0(1-e^{-2\alpha\nu})]}-e^{\lambda}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{C_2^2}{r^2[1+W_0(1-e^{-2\alpha\nu})]}$$

Переходя от r к $u=1/r$ и от дифференцирования по s к дифференцированию по φ, получаем аналог 1-й формулы Бине

$$C_2^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+e^{-\lambda}u^2\right]=e^{-\lambda}\left[C_3^2e^{-\nu}-1-W_0(1-e^{-2\alpha\nu})\right]. \qquad (35)$$

Продифференцировав по φ, получаем аналог 2-й формулы Бине

$$C_2^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+e^{-\lambda}u\right)=-\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[e^{-\nu}C_3^2(\dot{\nu}+\dot{\lambda})+e^{-2\alpha\nu}W_0(2\alpha\dot{\nu}+\dot{\lambda})-\right.$$

$$\left.-\dot{\lambda}(u^2C_2^2+1+W_0)\right]. \qquad (36а)$$

В случае отсутствия поля Φ_μ, т. е. $\alpha=0$, получаем известное уравнение для траектории частицы в поле Шварцшильда

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{b}{2C_2^2}+\frac{3}{2}bu^2.$$

В первом порядке по α уравнение (36а) имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{1}{2C_2^2}\left[2\alpha W_0b-2\alpha bC_3^2+b+\alpha(b-a)\right]+$$

$$+u\left[\frac{\alpha b^2-3\alpha C_3^2b^2-2\alpha W_0b^2}{2C_2^2}\right]+\frac{3}{2}u^2\left[b+\alpha(b-a)\right]. \qquad (36б)$$

Из первого члена справа следует, что центральное поле обладает эффективной массой

$$m'=m_1+m_2,$$

где

$$m_1=m(1+\alpha)-\frac{\alpha ac^2}{2k}; \qquad m_2=2\alpha m(W_0-C_3^2), \qquad (37)$$

k — ньютоновская постоянная, c — скорость света. Здесь мы положили $b=\frac{2mk}{c^2}$, где m — ненаблюдаемая масса источника. Часть эффективной массы m_2 оказывается зависящей от характеристик пробной частицы W и C_3^2.

Смещение перигелия орбиты пробного тела за один оборот находится из (36б) в виде

$$\delta\varphi\simeq\frac{6\pi k^2m_1^2}{c^4C_2^2}+\frac{\pi k^2}{c^4C_2^2}\left[9m_1m_2+2\alpha m_1(1-5W_0)\right], \qquad (38)$$

где $C_2=r^2\dot{\varphi}$ — удвоенная секторная скорость тела. Для заряженных частиц ($W_0\neq0$) смещение перигелия должно быть больше, чем для нейтральных.

Полагая для света $ds^2=0$, получаем уравнение для луча

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3km_1}{c^2}u^2-\alpha b\left(\frac{C_3}{C_2}\right)^2. \qquad (39)$$

Из (39) следует значение угла отклонения света, проходящего вблизи источника гравитационного поля

$$\Delta\beta\simeq\frac{4km_1}{c^2R}\left[1-\alpha\left(\frac{C_3R}{C_2}\right)^2\right], \qquad (40)$$

где R — прицельное расстояние. Первый член справа дает эйнштейновский эффект.

Следовательно, комбинация констант зависит от координат и то, что поле Φ_α определяется «скалярной» величиной B позволяют говорить о некотором созвучии данного подхода со скалярно-тензорной теорией гравитации Йордана—Бранса—Дикке.

В данной работе мы не касались обсуждения объединенной теории скалярно-тензорного гравитационного и электромагнитного полей. Авторы предполагают подробно обсудить такую теорию в отдельной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дикке Р. В сб.: «Гравитация и относительность». М., 1965, стр. 388.
2. Kaluza T. Zum Unitätsproblem der Physik, 1921, Sitzungsberichte d. Preuss. Akad., 966.
3. Эйнштейн А., Бергманн П. Собрание научных трудов А. Эйнштейна, т. 2. М., 1966, стр. 492.
4. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М., 1956.
5. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
6. Зельманов А. Л. Труды VI совещания по космогонии. М., 1959.

Поступила в редакцию
20.3 1972 г.

Кафедра
теоретической физики