Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

УДК 533.951

Ю. М. АЛИЕВ, О. М. ГРАДОВ, А. Ю. КИРИЙ

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ПЛАЗМЫ

Развита кинетическая теория дисперсионных свойств слоя плазмы, находящегося во внешнем однородном высокочастотном (ВЧ) электрическом поле. Отражение частиц от границы плазмы предполагается зеркальным. Показано, что при приближении частоты внешнего поля к собственным частотам поверхностных электронных колебаний возникает параметрический резонанс, приводящий к нарастанию низкочастотных объемных ионно-звуковых колебаний. Найдены пороговые значения напряженностей полей и определены величины надпороговых инкрементов.

Введение

Параметрическая связь почти потенциальных поверхностных волн, возникающая как в сильных, так и в слабых ВЧ-электрических полях, была изучена в работах [1, 2]. В настоящей работе исследуется возбуждение слабым ВЧ-электрическим полем объемных и поверхностных волн в слое плазмы.

Излагается теория дисперсионных свойств слоя плазмы, находящегося в слабом ВЧ-поле, вектор напряженности которого параллелен границе плазмы. Получено дисперсионное уравнение, описывающее параметрическую связь потенциальных колебаний плазменного слоя.

Проведенное рассмотрение показало, что связь между электронными высокочастотными модами колебаний оказывается весьма слабой, вследствие чего неустойчивость относительно раскачки только электронных мод (поверхностных и объемных) оказывается невозможной. Влияние границ на взаимодействие объемных ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний оказывается несущественным. Кинетическая теория параметрического взаимодействия таких колебаний изложена в [3]. Поэтому в данной работе рассматривается резонансное возбуждение объемных ионно-звуковых колебаний и поверхностных электронных.

Найдены пороговые значения напряженностей внешнего поля, начиная с которых плазма становится неустойчивой при параметрическом резонансе на частотах поверхностных электронных колебаний, а также инкременты над порогом неустойчивости.

Заметим, что параметрический резонанс между объемными ионно-звуковыми и поверхностными электронными колебаниями имеет место также и в случае достаточно коротких длин волн, когда область взаимодействия колебаний ограничена размером локализации поверхностной волны вблизи границ плазмы. При этом эффективная диссипация ионно-звуковых колебаний существенно возрастает в связи с тем, что ионно-звуковые колебания уходят из области взаимодействия волн.

Вывод дисперсионного уравнения

Рассмотрим однородный слой полностью ионизованной плазмы, граничащий со средой с диэлектрической проницаемостью ε_0 [1]. Вектор напряженности $\vec{E}_0$ ВЧ-электрического поля

$$\vec{E}_0(t) = \vec{E}_0 \sin \omega_0 t \tag{1}$$

будем считать ориентированным параллельно плоскости границы. Приближение однородности внешнего поля справедливо, когда характерный размер изменения внешнего поля в плазме значительно превышает область локализации одной из возбуждаемых волн.

Для описания параметрического возбуждения почти продольных колебаний воспользуемся кинетическим уравнением с интегралом соударений в форме, предложенной Ландау [4] для малых возмущений функции распределения δf_α частиц плазмы сорта α. Рассмотрим случай зеркального отражения частиц от поверхностей, ограничивающих плазму, когда решение системы кинетических уравнений и уравнений Максвелла для возмущений электрического поля в плазме (занимающей объем пространства $0 \leqslant z \leqslant d$) можно искать с помощью следующего периодического продолжения функции распределения $\delta f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, электрического $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и магнитного $\vec{B}(\vec{r}, t)$ полей:

$$\begin{gathered}
\delta f_\alpha(-z, -v_z) = \delta f_\alpha(z, v_z), \\
E_z(-z) = -E_z(z),\ E_{x,y}(-z) = E_{x,y}(z), \\
B_z(-z) = B_z(z),\ B_{x,y}(-z) = -B_{x,y}(z), \\
\delta f_\alpha(z + 2md) = \delta f_\alpha(z),\ \vec{E}(z + 2md) = \vec{E}(z),\ \vec{B}(z + 2md) = \vec{B}(z). \\
m = 1, 2, \ldots
\end{gathered} \tag{2}$$

Это позволяет воспользоваться обычным преобразованием Фурье для возмущений функций распределения и полей

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{2d} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \vec{E}_\nu e^{iK_{z,\nu} z + i\vec{K}_\parallel \vec{r}},$$

$$K_{z,\nu} = \frac{\pi\nu}{d},$$

Представляя электрическое и магнитное поля в виде разложения по гармоникам частоты внешнего поля (1) и исключая из уравнения Максвелла Фурье-компоненты магнитного поля, получаем следующую систему уравнений:

$$\left(K^2\delta_{rs} - K_r K_s - \frac{\omega_n^2}{c^2}\delta_{rs}\right) E_{s\nu}^{(n)}(K) - i\,\frac{4\pi\omega_n}{c^2}\, j_{r\nu}^{(n)}(K) =$$

[1] Считаем, что пространственно-временная дисперсия диэлектрической проницаемости ε_0 не существенна.

$$= 2ie_{rzs}[(-1)^\nu B_s^{(n)}(z=d) + B_s^{(n)}(z=0)]\frac{\omega_n}{c}, \tag{3}$$

$$\omega_n = \omega + i\gamma + \omega_0 n, \ r, s = x, y, z.$$

Здесь e_{rsp}—единичный, абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга, $\vec{j}_\nu^{(n)}(\vec{K})$ — n-я гармоника возмущения электрического тока

$$\vec{j}_\nu(\vec{K}, t) \equiv \sum_\alpha e_\alpha \int d\vec{V}\vec{V}\delta f_\alpha(\vec{K}, \vec{V}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{j}_\nu^{(n)}(\vec{K})e^{-i\omega_n t}.$$

Используя выражение для $\vec{j}_\nu^{(n)}(\vec{K})$, приведенное в работе [2], и граничные условия (2) и учитывая малые непотенциальные поправки с точностью до величин, квадратичных по напряженности внешнего ВЧ-поля, из (3) получаем следующие два дисперсионные уравнения для почти потенциальных колебаний:

$$1 + \frac{(\vec{K}_\parallel \vec{r}_E)^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_\nu \frac{2K_\parallel \varepsilon_0}{K^2 d} \left\{ \frac{2K_\parallel \varepsilon_0}{d} \frac{\delta\varepsilon_e^{(n)} - \delta\varepsilon_e^{(n+1)}}{D_n D_{n+1} \varepsilon^{(n)} \varepsilon^{(n+1)}} \times \right.$$

$$\times \sum_\nu \frac{\delta\varepsilon_i^{(n)} - \delta\varepsilon_i^{(n+1)}}{K^2 \varepsilon^{(n+1)} \varepsilon^{(n)}} - \frac{(\delta\varepsilon_e^{(n)} - \delta\varepsilon_e^{(n+1)})(\delta\varepsilon_i^{(n)} - \delta\varepsilon_i^{(n+1)})}{\varepsilon^{(n)} \varepsilon^{(n+1)}} \times$$

$$\left. \times \left[\frac{1}{D_{n+1}\varepsilon^{(n+1)}} + \frac{1}{D_n \varepsilon^{(n)}} \right] \right\} = 0, \tag{4}$$

где суммирование ведется по четным ν (симметричные моды), либо по нечетным ν (антисимметричные моды). Здесь

$$D_n = 1 + \frac{2\varepsilon_0}{\varkappa_n d} \sum_\nu \left\{ \frac{K_\parallel^2}{K^2 \varepsilon^{(n)}} - \frac{\omega_n^2 K_{z,\nu}^2}{c^2 K^4} \right\}, \ \varkappa_n = \left(K_\parallel^2 - \frac{\omega_n^2}{c^2}\varepsilon_0 \right)^{1/2},$$

$\delta\varepsilon_\alpha^{(n)} \equiv \delta\varepsilon_\alpha(\omega_n, \vec{K})$ — парциальный вклад частиц сорта α в продольную диэлектрическую проницаемость, $\vec{r}_E = e\vec{E}_0/m\omega_0^2$ — амплитуда осцилляций электронов во внешнем ВЧ-поле (1).

Параметрическая связь поверхностных и объемных ионно-звуковых колебаний

Рассмотрим прежде всего случай параметрического резонанса внешнего поля на частоте симметричных поверхностных электронных колебаний [5]

$$\omega = \omega_p \left(\frac{1 - \exp\{-K_\parallel d/2\}}{1 + \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)\exp\{-K_\parallel d/2\}} \right)^{1/2}.$$

Здесь $\omega_p = (\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2)^{1/2}$ — частота плазменных колебаний. В пределе $\omega_0 \ll \omega_p/\sqrt{1+\varepsilon_0}$ длины волн возбуждаемых колебаний значительно превосходят размер слоя ($K_\parallel d \ll 1$), а $\omega_0 \simeq \omega_p \sqrt{K_\parallel d/2\varepsilon_0}$. Дисперсионное уравнение (4) в таких условиях приобретает вид

$$1 + \frac{(\vec{K}_\parallel \vec{r}_E)^2}{4} \frac{[\delta\varepsilon_i^{(0)}]^2}{[\varepsilon(\omega_0)]^2} \frac{D_0 - 1}{D_0} \left\{ \frac{1}{D_{-1}} + \frac{1}{D_1} \right\} = 0. \tag{5}$$

Возбуждаемые низкочастотные ионно-звуковые колебания обладают дискретным спектром частот:

$$\omega = \omega_s(K_{2n}) = \omega_{Li} K_{2n} r_{De} \left[1 - \frac{1}{2} K_{2n}^2 r_{De}^2 - 2\varepsilon_0 K_\parallel r_{De} \frac{r_{De}}{d}\right], \tag{6}$$

$$K_{2n} = \sqrt{K_\parallel^2 + \frac{\pi^2 (2n)^2}{d^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, V_{Ti} \ll \frac{\omega}{K_{2n}} \ll V_{Te}.$$

В отсутствие ВЧ-поля эти колебания затухают с декрементом

$$\gamma_s = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}} \frac{r_{De}}{d} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} + \frac{4}{5} \nu_{ii} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2}. \tag{7}$$

Считая, что $\gamma_S \ll \omega$, а ω мало отличается от частоты ионно-звуковых колебаний, входящие в (5) величины запишем в следующем виде:

$$D_0 = \frac{\gamma_S + \gamma - i\delta\omega}{\gamma_S + \gamma + iA - i\delta\omega}; \quad A = 2\omega_{Li} \frac{r_{De}}{d} K_\parallel r_{De}^2 K_{2n}; \quad \delta\omega = \omega - \omega_S;$$

$$\widetilde{\gamma} = \frac{\varepsilon_0^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_{De}^2}{d^2} \omega_p \frac{\omega_0^4}{\omega_p^4} \ln \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\nu_{ei}}{2}; \quad \delta\varepsilon_i^{(0)} = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_s^2} = -\frac{1}{K_{2n}^2 r_{De}^2}; \tag{8}$$

$$\frac{1}{D_{-1}} + \frac{1}{D_1} = -\frac{\omega_0 \Delta}{\Delta^2 - (\omega + i\widetilde{\gamma})^2}; \quad \varepsilon(\omega_0) = -\frac{2\varepsilon_0}{K_\parallel d};$$

$$\Delta = \omega_0 - \omega_p \sqrt{\frac{K_\parallel d}{2\varepsilon_0}}.$$

В соответствии с этими выражениями из дисперсионного уравнения (5) следует, что наименьшее значение пороговой напряженности поля (и максимум инкрементов) достигается для $n=0$. В случае, когда $\widetilde{\gamma} \ll \omega_s$, для максимального инкремента получаем выражение

$$\delta\omega = 0, \quad \gamma = -\frac{\widetilde{\gamma} + \gamma_s}{2} + \sqrt{\frac{(\gamma_s - \widetilde{\gamma})^2}{4} + \frac{(\vec{K}_\parallel \vec{r}_E)^2}{16\varepsilon_0} \frac{d}{r_{De}} \omega_0 \omega_{ii}}, \tag{9}$$

соответствующее условию распада на поверхностную и ионно-звуковую волны:

$$\omega_0 = \omega_p \sqrt{\frac{K_\parallel d}{2\varepsilon_0}} + \omega_s (K_\parallel).$$

Условие $\widetilde{\gamma} \ll \omega_s$ принимает при этом вид

$$\frac{\nu_{ei}}{2} + \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_0^2 \frac{r_{De}^2}{d} \frac{\omega_0^4}{\omega_p^4} \ln \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} < 2\omega_{Li} \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \varepsilon_0 \frac{r_{De}}{d}. \tag{10}$$

Из (9) получаем следующее выражение для пороговой напряженности ВЧ-поля:

$$\frac{E_{0пор}^2}{4\pi n_e T_e} = \frac{4}{\varepsilon_0} \frac{d}{r_{De}} \frac{\widetilde{\gamma}\gamma_s}{\omega_0 \omega_{Li}}. \tag{11}$$

При $\tilde{\gamma}<\omega_s$ (10) не выполняется, а частота мало отличается от $\omega_s(K_\parallel)\,(\delta\omega\ll\omega_s)$ и неустойчивость становится нераспадной; из уравнения (5) получаем следующее выражение для инкремента:

$$\gamma = -\gamma_s + \frac{(\vec{K}_\parallel \vec{r}_E)^2}{16\varepsilon_0} K_\parallel d \frac{\omega_0 \tilde{\gamma}\,\omega_{Li}^2 \Delta}{(\Delta^2+\tilde{\gamma}^2)^2} \tag{12}$$

и соответствующего изменения частоты:

$$\delta\omega = \frac{\gamma_s+\gamma}{2\omega_s\tilde{\gamma}}(\Delta^2+\tilde{\gamma}^2). \tag{13}$$

Из формулы (12) видно, что максимум инкремента

$$\gamma = -\gamma_s + \frac{3\sqrt{3}}{32}\varepsilon_0^2 \frac{r_E^2}{d^2} \frac{\omega_0^7\omega_{Li}^2}{\omega_p^6\tilde{\gamma}^2} \tag{14}$$

и минимум порога

$$\frac{E_{0\text{пор}}^2}{4\pi n_e T_e} = \frac{8\sqrt{3}}{9\varepsilon_0^2} \frac{\tilde{\gamma}^2}{\omega_p^2} \frac{\gamma_s}{\omega_{Li}} \frac{d^2}{r_{De}^2} \frac{\omega_p^4}{\omega_{Li}\omega_0^3}$$

достигаются при $\Delta = \tilde{\gamma}/\sqrt{3}$.

Заметим, что условие потенциальности колебаний $K_\parallel c \gg \omega_0$ накладывает следующее ограничение на частоты внешнего поля:

$$\omega_0 \gg \omega_p \frac{V_{Te}}{c} \frac{d}{r_{De}}.$$

Кроме того, отсюда следует неравенство $d\ll c/\omega_p$, обеспечивающее выполнение условия однородности внешнего ВЧ-поля.

Использованное приближение $\delta\omega\ll\omega_S$ приводит, как видно из (10), к следующему неравенству:

$$(\gamma_s+\gamma)\,\tilde{\gamma} \ll \omega_s^2.$$

С увеличением частоты внешнего поля ω_0 и приближением ее к $\omega_p/\sqrt{1+\varepsilon_0}$ резонансно возбуждаются коротковолновые поверхностные колебания $(K_\parallel d\gg 1)$. При этом, однако, рассмотрим не слишком короткие длины волн:

$$K_\parallel^3 d^3 \ll \frac{\pi^2(2n+1)\,d^2}{r_{De}^2}, \tag{15}$$

что соответствует возбуждению симметричных ионно-звуковых колебаний с частотой, определяемой формулой (6) [1]. При этом в (5) лишь величины γ_s, Δ, γ и $\varepsilon(\omega_0)$ будут отличаться от приведенных в (7) и (8).

Запишем их в виде

$$\varepsilon(\omega_0) = -1;\ \gamma = c_2 K_\parallel r_{De}\omega_0 + \frac{\nu_{ei}}{2};$$

---

[1] При выполнении неравенства, обратного (15), происходит смена квантования волнового числа $K_{z,\nu}$ ионно-звуковых волн: $K_{z,2n}\to K_{z,2n+1}$.

$$\Delta = \omega_0 - \frac{\omega_p}{\sqrt{1+\varepsilon_0}}\left(1 + C_1 K_{\parallel} r_{De} - \frac{\omega_p^2}{4(1+\varepsilon_0)c^2K_{\parallel}^2}\right),$$

$$\gamma_S = \sqrt{\frac{\pi}{8}\,\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}}}\,\omega_s + \frac{4}{5}\nu_{ii}\frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2}\,. \tag{16}$$

Постоянные C_1 и C_2, определяющие спектр поверхностных [5] волн, вычислены в работе [2] для случая $\varepsilon_0=1$. Так как частота ионно-звуковых колебаний значительно меньше декремента затухания, то в рассматриваемом случае параметрическое возбуждение колебаний осуществляется в нераспадных условиях. Вблизи порога неустойчивости спектр возбуждаемых низкочастотных колебаний мало отличается от ионно-звукового и определяется формулой (13). Пороговое значение напряженности поля и максимальная величина инкремента определяются соответственно формулами:

$$\frac{E_{0\text{пор}}^2}{4\pi n_e T_e} = \frac{16\sqrt{3}}{9\varepsilon_0}\,\frac{\tilde{\gamma}^2\gamma_s\omega_0}{\omega_s^2\omega_p^2}K_{\parallel}d, \tag{17}$$

$$\gamma_{\max} = -\gamma_s + \frac{3\sqrt{3}}{16}\,\frac{r_E^2}{r_{De}^2}\,\frac{\omega_0\omega_s^2}{\tilde{\gamma}^2}\,\frac{1}{K_{\parallel}d}. \tag{18}$$

Как видно из этих выражений, пороговое значение напряженности ВЧ-поля возрастает с увеличением $K_{\parallel}d$, так как параметрическая связь объемных и поверхностных волн возникает лишь в области существования последних. Такой зависимости соответствует простая физическая картина. Поле поверхностной волны локализовано вблизи границы плазмы на расстоянии порядка $1/K_{\parallel}$. Именно в этой области происходит взаимодействие поверхностной моды с внешним ВЧ-полем, приводящее к возбуждению ионно-звуковых колебаний. Вне области взаимодействия волн ионно-звуковые колебания затухают с декрементом γ_s (16). Инкремент нарастания ионно-звуковых колебаний для случая, когда размер области взаимодействия волн порядка размера слоя (см. (14)), имеет вид

$$\Gamma \approx -\gamma_s + \frac{\omega_0\omega_s^2}{\tilde{\gamma}^2}\,\frac{r_E^2}{r_{De}^2}.$$

Таким образом, ионно-звуковые колебания, раскачиваясь вблизи поверхности плазмы в области порядка $1/K_{\parallel}$ и затухая в остальном слое плазмы толщиной d ($d \gg K_{\parallel}^{-1}$), в среднем затухают (раскачиваются) с эффективным декрементом (инкрементом)

$$\gamma = -\gamma_s + \Gamma/K_{\parallel}d,$$

что соответствует формулам (17), (18).

Наконец, заметим, что в рассматриваемой области частот внешнего поля возбуждение антисимметричных ионно-звуковых колебаний не отличается от раскачки симметричных мод.

При еще больших частотах внешнего поля, когда $\frac{\omega_p}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} < \omega_0 \leqslant \omega_p$, осуществляется параметрическая связь антисимметричной поверхностной волны

$$\omega \equiv \omega_p \left(\frac{1 + \exp\{-K_\parallel d/2\}}{1 + \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0)\exp\{-K_\parallel d/2\}} \right)^{1/2}$$

с ионно-звуковыми колебаниями. Для такой области частот внешнего поля $K_\parallel d < 1$ и $\omega \simeq \omega_r = \omega_p(1 - \varepsilon_0 K_\parallel d/4)$.

В рассматриваемом случае входящие в (5) величины Δ, $\widetilde{\gamma}$ и $\varepsilon(\omega_0)$ имеют следующий вид:

$$\Delta = \omega_0 - \omega_r, \quad \widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}(\nu_{ei} + \varepsilon_0^2 C_2 K_\parallel^2 r_{De} d\omega_0),$$

$$\varepsilon(\omega_0) = -\varepsilon_0 K_\parallel d/2.$$

Остальные величины определяются формулами (8) и (16).

Здесь постоянная C_2 равна

$$C_2 = \frac{1}{4r_{De}d} \sum_{K_{z,2n+1}} \frac{\varepsilon''(\vec{K}, \omega_r)}{K^2 |\varepsilon(\vec{K}, \omega_r)|^2}.$$

Ограничимся случаем, когда частота внешнего поля достаточно близка к ω_p, что соответствует возбуждению достаточно длинных волн $K_\parallel^2 d^2 \ll \omega_{Li}/\omega_{Le}$. При этом параметрическое взаимодействие носит распадный характер. Максимум инкремента

$$\gamma_{\max} = -\frac{\widetilde{\gamma} + \gamma_s}{2} + \sqrt{\frac{(\widetilde{\gamma} - \gamma_s)^2}{4} + \frac{r_E^2}{4r_{De}^2} \frac{K_\parallel^2 \omega_{Li}\omega_{Le} r_{De}}{K_{2n+1}^3 d}}$$

достигается в области частот внешнего поля

$$\omega_0 = \omega_r + \omega_s.$$

Соответствующее значение пороговой напряженности ВЧ-поля равно:

$$\frac{E_{0\text{пор}}^2}{4\pi n_e T_e} = \frac{4\gamma_s \widetilde{\gamma}}{\omega_{Li}\omega_{Le}} \frac{k_{2n+1}^3 d^2}{k_\parallel^2 \, r_{De}}.$$

Как видим, значение напряженности порогового поля растет с увеличением номера моды низкочастотных колебаний.

Авторы выражают благодарность В. П. Силину за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ю. М., Ферленги Э. ЖЭТФ, 57, 1623, 1969.
2. Алиев Ю. М., Градов О. М., Кирий А. Ю. ЖЭТФ (в печати), 1972.
3. Андреев Н. Е., Кирий А. Ю., Силин В. П. ЖЭТФ, 57, 1028, 1969.
4. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 7, 203, 1937.
5. Романов Ю. А. «Радиофизика», 7, 828, 1964.

Поступила в редакцию
20.3 1972 г.

Кафедра
электроники